Παράδειγμα #8
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Ν. Βασιλειάδης

<u>Άσκηση 1</u>

Με βάση τη σειρά Taylor να βρεθεί α) για τη παράγωγο f_{xx} την κεντρώα έκφραση πεπερασμένων διαφορών $2^{ης}$ τάξης και β) για τη παράγωγο f_{xxx} την ανάδρομη έκφραση πεπερασμένων διαφορών $2^{ης}$ τάξης

Απάντηση:

α) Κεντρώα έκφραση $2^{ης}$ τάξης για την παράγωγο f_{xx} (με σειρά Taylor):

$$f_{i+1} = f_i + h\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i + \frac{h^2}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i + \frac{h^3}{6}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_i + O\left(h^4\right) \tag{1}$$

$$f_{i-1} = f_i - h\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i + \frac{h^2}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i - \frac{h^3}{6}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_i + O\left(h^4\right) \tag{2}$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει:

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + 2\frac{h^2}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i + O\left(h^4\right) \Rightarrow h^2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} + O\left(h^4\right) \Rightarrow$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O\left(h^2\right) \tag{3}$$

β) Ανάδρομη έκφραση $2^{ης}$ τάξης για την παράγωγο f_{xxx} (με σειρά Taylor):

$$f_{i-1} = f_i - h\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i + \frac{h^2}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i - \frac{h^3}{6}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_i + \frac{h^4}{24}\left.\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right|_i + O\left(h^5\right) \tag{4}$$

$$f_{i-2} = f_i - 2h\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i + \frac{(2h)^2}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i - \frac{(2h)^3}{6}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_i + \frac{(2h)^4}{24}\left.\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right|_i + O\left(h^5\right) \tag{5}$$

$$f_{i-3} = f_i - 3h\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i + \frac{(3h)^2}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i - \frac{(3h)^3}{6}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_i + \frac{(3h)^4}{24}\left.\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right|_i + O\left(h^5\right) \tag{6}$$

$$f_{i-4} = f_i - 4h\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i + \frac{(4h)^2}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i - \frac{(4h)^3}{6}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_i + \frac{(4h)^4}{24}\left.\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right|_i + O\left(h^5\right) \tag{7}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (4) με 18, την (5) με -24, την (6) με 14, την (7) με -3 και προσθέτοντας κατά μέλη τις παραγόμενες εξισώσεις προκύπτει τελικά:

$$18 f_{i-1} - 24 f_{i-2} + 14 f_{i-3} - 3 f_{i-4} = 5 f_i - 2h^3 \left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_i + O\left(h^5\right) \Rightarrow$$

$$\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_i = \frac{5 f_i - 18 f_{i-1} + 24 f_{i-2} - 14 f_{i-3} + 3 f_{i-4}}{2h^3} + O\left(h^2\right) \qquad (8)$$

<u>Άσκηση 2</u>

Να βρεθεί μία κεντρώα έκφραση πεπερασμένων διαφορών 2ης τάξης που να προσεγγίζει την παράγωγο f_{xx} στον κόμβο i ενός πλέγματος ($i = 1,2,\ldots,N$), όταν η απόσταση ανάμεσα σε διαδοχικούς κόμβους δεν παραμένει σταθερή αλλά μεταβάλλεται (δηλαδή όταν $\left|x_i - x_{i-1}\right| = h_i$).

Απάντηση:

Η συνάρτηση f προσεγγίζεται με πολυώνυμο P_2 δεύτερης τάξης όπου θεωρείται ότι η αρχή των αξόνων βρίσκεται στο σημείο x_i. Τα σημεία x_{i-1} και x_{i+1} βρίσκονται σε απόσταση $-h$ και kh από το σημείο x_i αντίστοιχα.

$$\left.\begin{array}{l} P_2(x_{i-1} = -h) = ah^2 - bh + c = f_{i-1} \\ P_2(x_i = 0) = c = f_i \\ P_2(x_{i+1} = kh) = a\left(kh\right)^2 + b\left(kh\right) + c = f_{i+1} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} f_{i-1} = ah^2 - bh + f_i \\ f_{i+1} = ak^2h^2 + bkh + f_i \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$kf_{i-1} - kf_i + f_{i+1} - f_i = akh^2 + ak^2h^2 \Rightarrow 2a = \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i = 2\frac{f_{i+1} - (1+k) f_i + kf_{i-1}}{k(1+k)h^2}$$

<u>Άσκηση 3</u>

Να αποδειχθεί με α) σειρά Taylor και β) με πολυωνυμική παρεμβολή η έκφραση πεπερασμένων διαφορών:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i+1,j-1} - f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\Delta x \Delta y} + O\left(\Delta x, \Delta y\right)$$

Απάντηση:

α) Απόδειξη με σειρά Taylor:

Αρχικά αναπτύσσονται οι όροι $f_{i+1,j}$, $f_{i,j-1}$ και $f_{i+1,j-1}$ μέσω σειράς Taylor ως:

$$f_{i+1,j} = f_{i,j} + \Delta x \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} + \frac{\Delta x^2}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} + O\left(\Delta x^3\right) \tag{1}$$

$$f_{i,j-1} = f_{i,j} - \Delta y \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} + \frac{\Delta y^2}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} + O\left(\Delta y^3\right) \tag{2}$$

$$\begin{aligned} f_{i+1,j-1} = {} & f_{i,j} + \Delta x \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} - \Delta y \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} + \frac{\Delta x^2}{2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} - \Delta x \Delta y \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} + \frac{\Delta y^2}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} + \\ & + O\left(\Delta x^3, \Delta x^2 \Delta y, \Delta x \Delta y^2, \Delta y^3\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) και αφαιρώντας την (3) προκύπτει:

$$f_{i+1,j} - f_{i+1,j-1} + f_{i,j-1} = f_{i,j} + \Delta x \Delta y \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} + O\left(\Delta x^3, \Delta x^2 \Delta y, \Delta x \Delta y^2, \Delta y^3\right) \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i+1,j-1} - f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\Delta x \Delta y} + O\left(\frac{\Delta x^2}{\Delta y}, \Delta x, \Delta y, \frac{\Delta y^2}{\Delta x}\right) \tag{5}$$

Θέτοντας $\Delta x = \Delta y$ η (5) δίνει:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i+1,j-1} - f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\Delta x \Delta y} + O\left(\Delta x, \Delta y\right) \tag{6}$$

β) Απόδειξη με πολυωνυμική παρεμβολή:

Έστω $P_2\left(x, y\right) = Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F$

Θεωρείται ότι η αρχή των αξόνων βρίσκεται στο σημείο x_i, y_j και άρα το τοπικό σύστημα συντεταγμένων είναι:

$$\left(x_i, y_j\right) = \left(0,0\right),\ \left(x_{i+1}, y_j\right) = \left(\Delta x, 0\right),\ \left(x_i, y_{j-1}\right) = \left(0, -\Delta y\right),\ \left(x_{i+1}, y_{j-1}\right) = \left(\Delta x, -\Delta y\right)$$

Με βάση το παραπάνω σύστημα συντεταγμένων προκύπτουν οι παρακάτω εκφράσεις :

$$P_2(0,0) = F = f_{i,j} \tag{7}$$
$$P_2(\mathit{\Delta} x,0) = A\mathit{\Delta} x^2 + D\mathit{\Delta} x + F = f_{i+1,j} \tag{8}$$
$$P_2(0,-\mathit{\Delta} y) = B\mathit{\Delta} y^2 - E\mathit{\Delta} y + F = f_{i,j-1} \tag{9}$$
$$P_2(\mathit{\Delta} x,-\mathit{\Delta} y) = A\mathit{\Delta} x^2 + B\mathit{\Delta} y^2 - C\mathit{\Delta} x\mathit{\Delta} y + D\mathit{\Delta} x - E\mathit{\Delta} y + F = f_{i+1,j-1} \tag{10}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (8) και (9) και αφαιρώντας την (10) προκύπτει:

$$C\mathit{\Delta} x\mathit{\Delta} y + F = f_{i+1,j} + f_{i,j-1} - f_{i+1,j-1} \Rightarrow C = \left.\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}\right|_{i=0,\, j=0} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i+1,j-1} - f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\mathit{\Delta} x\mathit{\Delta} y}$$

<u>**Άσκηση 4**</u>

Έστω μία συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών $f = f(x,y)$. Με βάση τη σειρά Taylor να βρεθούν οι εκφράσεις για τις μερικές παραγώγους $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4}, \dfrac{\partial^4 f}{\partial y^4}$ και $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}$.

Απάντηση:

Ξεκινώντας από το ανάπτυγμα Taylor στην x κατεύθυνση για απόσταση $\pm\Delta x$ από το κεντρικό σημείο i:

$$f_{i+1,j} = f_{i,j} + \Delta x\, f_x + \frac{\Delta x^2}{2} f_{xx} + \frac{\Delta x^3}{6} f_{xxx} + \frac{\Delta x^4}{24} f_{xxxx} + \frac{\Delta x^5}{120} f_{xxxxx} + O\left(\Delta x^6\right) \tag{1}$$
$$f_{i-1,j} = f_{i,j} - \Delta x\, f_x + \frac{\Delta x^2}{2} f_{xx} - \frac{\Delta x^3}{6} f_{xxx} + \frac{\Delta x^4}{24} f_{xxxx} - \frac{\Delta x^5}{120} f_{xxxxx} + O\left(\Delta x^6\right) \tag{2}$$
$$f_{i+2,j} = f_{i,j} + 2\Delta x\, f_x + \frac{4^2}{2} f_{xx} + \frac{8\Delta x^3}{6} f_{xxx} + \frac{16\Delta x^4}{24} f_{xxxx} + \frac{32\Delta x^5}{120} f_{xxxxx} + O\left(\Delta x^6\right) \tag{3}$$
$$f_{i-2,j} = f_{i,j} - 2\Delta x\, f_x + \frac{4^2}{2} f_{xx} - \frac{8\Delta x^3}{6} f_{xxx} + \frac{16\Delta x^4}{24} f_{xxxx} - \frac{32\Delta x^5}{120} f_{xxxxx} + O\left(\Delta x^6\right) \tag{4}$$

Όπου όλες οι παράγωγοι στα παραπάνω αναπτύγματα υπολογίζονται στο σημείο i, j. Προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις (1), (2), -4$\cdot$(3) και -4$\cdot$(4) προκύπτει:

$$f_{i+2,j} - 4 f_{i+1,j} - 4 f_{i-1,j} + f_{i-2,j} = -6 f_{i,j} + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right)\Delta x^4 f_{xxxx} + O\left(\Delta x^6\right) \tag{5}$$

Λύνοντας ως προς f_{xxxx}:

$$\left.\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right|_{i,j} = \left.f_{xxxx}\right|_{i,j} = \frac{f_{i+2,j} - 4f_{i+1,j} + 6f_{i,j} - 4f_{i-1,j} + f_{i-2,j}}{\Delta x^4} + O\left(\Delta x^2\right) \tag{6}$$

Με ακριβώς αντίστοιχο τρόπο προκύπτει ο τύπος:

$$\left.\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right|_{i,j} = \left.f_{yyyy}\right|_{i,j} = \frac{f_{i,j+2} - 4f_{i,j+1} + 6f_{i,j} - 4f_{i,j-1} + f_{i,j-2}}{\Delta y^4} + O\left(\Delta y^2\right) \tag{7}$$

Για να ευκολύνουν οι απαραίτητοι υπολογισμού, δημιουργούνται οι ακόλουθες συναρτήσεις στο Mathematica:

```
t[a_]:=Apply[Plus,CoefficientRules[a,{Q, R}]/.({k_,l_}->m_)->m*fxy[k,l]]
n = 6;
Taylor[k_, l_]=f+Apply[Plus,Table[t[(k*dx*Q+l*dy*R)^p]/p!, {p,1,n}]]
```

Η πρώτη συνάρτηση είναι βοηθητική, ενώ η δεύτερη συνάρτηση εκφράζει το ανάπτυγμα Taylor της $f(x+k\Delta x, \mathrm{y}+l\Delta y)$ γύρω από το σημείο x, y διατηρώντας παραγώγους μέχρι τάξης n:

$$f_{i+k,j+l}(x,y) = f_{i,j}(x,y) + \left(k\Delta x \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{i,j} + l\Delta y \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{i,j}\right) f(x,y)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(k\Delta x \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{i,j} + l\Delta y \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{i,j}\right)^2 f(x,y) + \frac{1}{3!}\left(k\Delta x \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{i,j} + l\Delta y \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{i,j}\right)^3 f(x,y) + \ldots$$

Για παράδειγμα το ανάπτυγμα Taylor με $k=1$, $l=-1$ και κρατώντας όρους 2^ης^ τάξης γράφεται ως:

$$f_{i+1,j-1} = f_{i,j} + \left(\Delta x \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{i,j} - \Delta y \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{i,j}\right) f + \frac{1}{2!}\left(\Delta x \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{i,j} - \Delta y \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{i,j}\right)^2 f =$$
$$= f_{i,j} + \Delta x \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} - \Delta y \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} + \frac{\Delta x^2}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} - \Delta x\,\Delta y \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} + \frac{\Delta y^2}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j}$$

Το παραπάνω ανάπτυγμα αναπαρίσταται στη Mathematica ως Taylor[1,-1], το οποίο δίνει:

```
f+dx*fxy[1,0]-dy*fxy[0, 1]+1/2*(dx^2*fxy[2,0]–2*dx*dy*fxy[1, 1]+
dy^2*fxy[0, 2])
```

Οι συμβολισμοί που χρησιμοποιούνται είναι οι ακόλουθοι:

$$\mathrm{dx} \to \Delta x, \qquad \mathrm{dy} \to \Delta y, \qquad \mathrm{f} \to f_{i,j}, \qquad \mathrm{fxy[m,n]} \to \left.\frac{\partial^{m+n} f(x,y)}{\partial x^m \partial y^n}\right|_{i,j}$$

Επειδή πρέπει να βρεθεί η έκφραση που προσεγγίζει την παράγωγο 4ης τάξης διατηρούνται στις πράξεις παράγωγοι μέχρι και 6ης τάξης, έτσι ώστε να είναι δυνατόν να βγει συμπέρασμα για το αν η προκύπτουσα έκφραση είναι πρώτης ή δεύτερης τάξης.

Μέσω του αναπτύγματος Taylor με $k,l = 0,\pm 1$ και παίρνοντας όλους τους δυνατούς συνδυασμούς μεταξύ των k και l θα πρέπει στο δεξί μέλος να παραμείνει η μικτή παράγωγος 4ης τάξης καθώς και παράγωγοι ανώτερης τάξης, ενώ όλες οι άλλες παράγωγοι ίδιας ή μικρότερης τάξης να απαλειφθούν.

Οι υπολογισμοί έγιναν με το Mathematica σταδιακά ως εξής:

```
AA = Taylor[1,1]+Taylor[-1,-1] // Expand;
BB = Taylor[-1,1]+Taylor[1,-1] // Expand;
CC = AA+BB//Expand;
DD = Taylor[1,0]+Taylor[-1,0] // Expand;
EE = Taylor[0,1]+Taylor[0,-1] // Expand;
FF = CC-2*DD-2*EE // Expand
```

Από το οποίο προκύπτει:

```
-4*f + dx^2*dy^2*fxy[2,2] + 1/12*dx^2*dy^4*fxy[2,4] + 1/12*dx^4*dy^2*
fxy[4,2]
```

Επομένως, η μικτή παράγωγος υπολογίζεται από την έκφραση 9 σημείων όπου έχει ακρίβεια 2ης τάξης ως:

$$\left.\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right|_{i,j} = \frac{1}{\Delta x^2\, \Delta y^2}\left(4 f_{i,j} + f_{i+1,j+1} + f_{i-1,j-1} + f_{i-1,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2 f_{i+1,j} - 2 f_{i-1,j} - 2 f_{i,j+1} - 2 f_{i-1,j-1}\right) + \\ + O\left(\Delta x^2\, \Delta y^4, \Delta x^4\, \Delta y^2\right)$$

<u>Άσκηση 5</u>

Έστω τα μη ισαπέχοντα σημεία x_0, x_1, x_2 (επί του άξονα x) όπου $x_1 - x_0 = h/2$ και $x_2 - x_1 = h$ και οι αντίστοιχες τιμές f_0, f_1, f_2. Διατυπώστε την απλούστερη πρόδρομη έκφραση πεπερασμένων διαφορών με σειρά Taylor της $2^{ης}$ παραγώγου της f στο σημείο x_0 ($f_{xx}\big|_{x=x_0} = ?$).

Απάντηση:

Αρχικά γίνονται τα αναπτύγματα Taylor για την συνάρτηση f στα σημεία x_1 και x_2 ως:

$$f(x_1) = f_1 = f\left(x + \frac{h}{2}\right) = f_0 + \frac{h}{2} f_x + \frac{h^2}{8} f_{xx} + O\left(h^3\right) \quad (1)$$

$$f(x_2) = f_2 = f\left(x + \frac{3h}{2}\right) = f_0 + \frac{3h}{2} f_x + \frac{9h^2}{8} f_{xx} + O\left(h^3\right) \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1) με -3 και προσθέτοντας την κατά μέλη με την (2) προκύπτει:

$$-3f_1 + f_2 = -3f_0 + f_0 - \frac{3h^2}{8} f_{xx} + \frac{9h^2}{8} f_{xx} + O\left(h^3\right) \Rightarrow f_{xx}\big|_{x_0} = \frac{8f_0 - 12f_1 + 4f_2}{3h^2} + O(h)$$

Πολυωνυμική παραγώγιση: $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, $\qquad f_{xx} = 2A$

$$f(x_0) = f_0 = C, \qquad f(x_1) = f_1 = A\frac{h^2}{4} + B\frac{h}{2} + f_0, \qquad f(x_2) = f_2 = A\frac{9h^2}{4} + B\frac{3h}{2} + f_0$$

$$-3f_1 + f_2 = A\frac{3h^2}{2} - 2f_0 \quad \rightarrow \quad A = \frac{2f_2 - 6f_1 + 4f_0}{3h^2} \quad \rightarrow \quad f_{xx} = 2A = \frac{4f_2 - 12f_1 + 8f_0}{3h^2}$$

Άσκηση 6

Σε τετραγωνική πλάκα $0 \le x \le 1$ και $0 \le y \le 1$ οι θερμοκρασίες $T(x, y)$ έχουν μετρηθεί σε συγκεκριμένα σημεία και είναι:

$T(0,1)=0$	$T(0.6,1)=50$	$T(1,1)=0$
$T(0,0.3)=50$	$T(0.6,0.3)=200$	$T(1,0.3)=50$
$T(0,0)=0$	$T(0.6,0)=50$	$T(1,0)=0$

Εφαρμόζοντας τη πολυωνυμική μεθοδολογία με πολυώνυμο $2^{ης}$ τάξης να υπολογιστούν οι παράγωγοι $\frac{\partial T}{\partial x}$ και $\frac{\partial T}{\partial y}$ στο σημείο $(x, y) = (0.6, 0.3)$. Να σχολιαστούν τα αποτελέσματά ως προς την ακρίβεια και το πρόσημο των παραγώγων (θετικό ή αρνητικό).

Απάντηση:

Για τον υπολογισμό παραγώγου T_x στο σημείο $(x, y) = (0.6, 0.3)$ το πολυώνυμο παρεμβολής γράφεται για $y = 0.3$ ως

$$T(x, 0.3) = Ax^2 + Bx + C \quad \Rightarrow \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{y=0.3} = 2Ax + B$$

Η παραπάνω έκφραση για $x = 0$, $x = 0.6$ και $x = 1$ δίνει:

$$T(0, 0.3) = 50 \Rightarrow C = 50$$
$$T(0.6, 0.3) = 200 \Rightarrow 0.36A + 0.6B + C = 200 \Rightarrow 0.36A + 0.6B = 150$$
$$T(1, 0.3) = 50 \Rightarrow A + B + C = 50 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow A = -B$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα προκύπτει $A = -625$ και $B = 625$.

Άρα $\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0.6, y=0.3} = 2(-625)(0.6) + 625 = -125$

Για τον υπολογισμό της παραγώγου T_y στο σημείο $(x, y) = (0.6, 0.3)$ το πολυώνυμο παρεμβολής γράφεται για $x = 0.6$ ως

$$T(0.6, y) = Dy^2 + Ey + F \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial y} = 2Dy + E$$

$$T\left(0.6,0\right)=50 \Rightarrow F=50$$
$$T\left(0.6,0.3\right)=200 \Rightarrow 0.09D+0.3E+F=200 \Rightarrow 0.09D+0.3E=150$$
$$T\left(0.6,1\right)=50 \Rightarrow D+E+F=50 \Rightarrow D+E=0 \Rightarrow D=-E$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα προκύπτει $D=-714.29$ και $E=714.29$.

Άρα $\left.\dfrac{dT}{dy}\right|_{x=0.6,y=0.3}=2\left(-714.29\right)\left(0.3\right)+714.29=285.72$

Η ακρίβεια των παραγώγων είναι $1^{\eta\varsigma}$ τάξης καθώς τα σημεία παρεμβολής δεν είναι ισαπέχοντα, ενώ τα πρόσημα των παραγώγων δηλώνουν τη κατεύθυνση των συνιστωσών της θερμορροής.