Παράδειγμα #6
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Ν. Βασιλειάδης

Άσκηση 1
Να γίνει σύγκριση των μεθόδων παρεμβολής Newton και Lagrange:

Απάντηση:

Παρεμβολή Newton:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_N \prod_{i=0}^{N-1}(x - x_i) \tag{1}$$

Παρεμβολή Lagrange:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x), \quad \text{όπου} \quad L_i(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n}(x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n}(x_i - x_j)} \tag{2}$$

Στη μέθοδο Newton αφού υπολογισθούν οι συντελεστές α_i, τότε η τιμή του πολυωνύμου παρεμβολής σε ένα δεδομένο σημείο υπολογίζεται με $O(n)$ πολλαπλασιασμούς και προσθέσεις, ενώ ο αντίστοιχος υπολογισμός έχοντας το πολυώνυμο παρεμβολής όπως προκύπτει από τη μέθοδο Lagrange απαιτεί περισσότερες πράξεις (Γ. Ακρίβης και Β. Δουγαλής, Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, σελ.147-148).
Επίσης, η παρεμβολή σε ένα επιπλέον σημείο, δηλαδή παρεμβολή στα σημεία $x_0,\ldots,x_n$ και x_{n+1}, απαιτεί τον υπολογισμό των νέων πολυωνύμων Lagrange εξ αρχής, ενώ με τη μέθοδο Newton απλώς υπολογίζεται ο επιπλέον συντελεστής a_{N+1} του πολυωνύμου.
Βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου Lagrange είναι η απλότητα της Εξ. (2), κάτι που την καθιστά χρήσιμη για θεωρητικούς σκοπούς.

Άσκηση 2
Να χρησιμοποιηθούν οι μέθοδοι α) παρεμβολής Lagrange και β) κυβικές splines, και να βρεθεί η συνάρτηση παρεμβολής στον πίνακα δεδομένων:

x_i	0.9	1.3	1.9	2.1	2.6	3.0	3.9	4.4	4.7	5.0	6.0
$f(x_i)$	1.3	1.5	1.85	2.1	2.6	2.7	2.4	2.15	2.05	2.1	2.25

Απάντηση:

2α. Παρεμβολή Lagrange.

Εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία παρεμβολής Lagrange, το πολυώνυμο παρεμβολής είναι

$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) + f(x_4)L_4(x) + f(x_5)L_5(x) +$$
$$+ f(x_6)L_6(x) + f(x_7)L_7(x) + f(x_8)L_8(x) + f(x_9)L_9(x) + f(x_{10})L_{10}(x)$$

όπου

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)(x-x_7)(x-x_8)(x-x_9)(x-x_{10})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)(x_0-x_5)(x_0-x_6)(x_0-x_7)(x_0-x_8)(x_0-x_9)(x_0-x_{10})}$$
$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)(x-x_7)(x-x_8)(x-x_9)(x-x_{10})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)(x_1-x_6)(x_1-x_7)(x_1-x_8)(x_1-x_9)(x_1-x_{10})}$$
$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)(x-x_7)(x-x_8)(x-x_9)(x-x_{10})}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)(x_2-x_6)(x_2-x_7)(x_2-x_8)(x_2-x_9)(x_2-x_{10})}$$
$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)(x-x_7)(x-x_8)(x-x_9)(x-x_{10})}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)(x_3-x_5)(x_3-x_6)(x_3-x_7)(x_3-x_8)(x_3-x_9)(x_3-x_{10})}$$
$$L_4(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_5)(x-x_6)(x-x_7)(x-x_8)(x-x_9)(x-x_{10})}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)(x_4-x_5)(x_4-x_6)(x_4-x_7)(x_4-x_8)(x_4-x_9)(x_4-x_{10})}$$
$$L_5(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_6)(x-x_7)(x-x_8)(x-x_9)(x-x_{10})}{(x_5-x_0)(x_5-x_1)(x_5-x_2)(x_5-x_3)(x_5-x_4)(x_5-x_6)(x_5-x_7)(x_5-x_8)(x_5-x_9)(x_5-x_{10})}$$
$$L_6(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_7)(x-x_8)(x-x_9)(x-x_{10})}{(x_6-x_0)(x_6-x_1)(x_6-x_2)(x_6-x_3)(x_6-x_4)(x_6-x_5)(x_6-x_7)(x_6-x_8)(x_6-x_9)(x_6-x_{10})}$$
$$L_7(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)(x-x_8)(x-x_9)(x-x_{10})}{(x_7-x_0)(x_7-x_1)(x_7-x_2)(x_7-x_3)(x_7-x_4)(x_7-x_5)(x_7-x_6)(x_7-x_8)(x_7-x_9)(x_7-x_{10})}$$
$$L_8(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)(x-x_7)(x-x_9)(x-x_{10})}{(x_8-x_0)(x_8-x_1)(x_8-x_2)(x_8-x_3)(x_8-x_4)(x_8-x_5)(x_8-x_6)(x_8-x_7)(x_8-x_9)(x_8-x_{10})}$$
$$L_9(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)(x-x_7)(x-x_8)(x-x_{10})}{(x_9-x_0)(x_9-x_1)(x_9-x_2)(x_9-x_3)(x_9-x_4)(x_9-x_5)(x_9-x_6)(x_9-x_7)(x_9-x_8)(x_8-x_{10})}$$
$$L_{10}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)(x-x_7)(x-x_8)(x-x_9)}{(x_{10}-x_0)(x_{10}-x_1)(x_{10}-x_2)(x_{10}-x_3)(x_{10}-x_4)(x_{10}-x_5)(x_{10}-x_6)(x_{10}-x_7)(x_{10}-x_8)(x_{10}-x_9)}$$

Ο κώδικας σε Mathematica για την παρεμβολή Lagrange δίνεται παρακάτω:

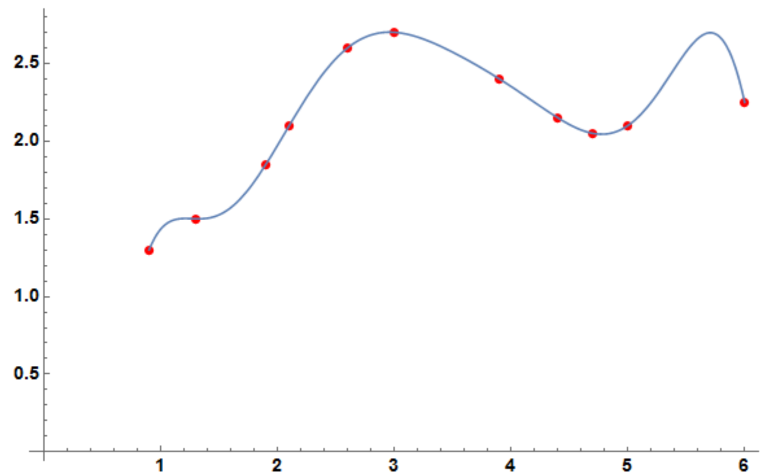
```
xi = {0.9, 1.3, 1.9, 2.1, 2.6, 3.0, 3.9, 4.4, 4.7, 5.0, 6.0};
fi = {1.3, 1.5, 1.85, 2.1, 2.6, 2.7, 2.4, 2.15, 2.05, 2.1, 2.25};
L = ConstantArray[1, Length[xi]];
Do[If[i != j, L[[i]] = L[[i]]*(x - xi[[j]])/(xi[[i]] - xi[[j]])], {i,
   Length[xi]}, {j, Length[xi]}];
Pol = Expand[Sum[fi[[i]]*L[[i]], {i, Length[xi]}]];
Print["P(x)=", Pol]
InterpPoints = Table[{xi[[i]], fi[[i]]}, {i, Length[xi]}];
```

```
Show[ListPlot[InterpPoints, PlotStyle -> Red],
 Plot[Pol, {x, Min[xi], Max[xi]}], PlotLabel -> None,
 LabelStyle -> {14, GrayLevel[0], Bold}]
```

Το πολυώνυμο παρεμβολής που προκύπτει είναι:

$$P(x) = -11.4729 + 28.8879x - 6.61287x^2 - 36.9287x^3 + 48.2705x^4 - 28.7898x^5 + 9.92525x^6 - \\ - 2.09351x^7 + 0.267019x^8 - 0.018932x^9 + 0.000572932x^{10}$$

Με βάση τον παραπάνω κώδικα η γραφική παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής συναρτήσει των αρχικών σημείων παρεμβολής απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:



2β. Παρεμβολή κυβικών splines.

Οι ποσότητες $h_i = x_{i+1} - x_i$ και $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$ που απαιτούνται για των υπολογισμό των πολυωνύμων $S_i(x)$ συναρτήσει των x_i και $f(x_i)$ φαίνονται παρακάτω:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h_i	0.4	0.6	0.2	0.5	0.4	0.9	0.5	0.3	0.3	1.0
Δf_i	0.2	0.35	0.25	0.5	0.1	-0.3	-0.25	-0.1	0.05	0.15

Τα πολυώνυμα για τα αντίστοιχα υποδιαστήματα είναι τα παρακάτω:

$$S_0(x)=\frac{y_0''}{6h_0}(x_1-x)^3+\frac{y_1''}{6h_0}(x-x_0)^3+\left[\frac{f_1}{h_0}-\frac{y_1''h_0}{6}\right](x-x_0)+\left[\frac{f_0}{h_0}-\frac{y_0''h_0}{6}\right](x_1-x)$$
$$S_1(x)=\frac{y_1''}{6h_1}(x_2-x)^3+\frac{y_2''}{6h_1}(x-x_1)^3+\left[\frac{f_2}{h_1}-\frac{y_2''h_1}{6}\right](x-x_1)+\left[\frac{f_1}{h_1}-\frac{y_1''h_1}{6}\right](x_2-x)$$
$$S_2(x)=\frac{y_2''}{6h_2}(x_3-x)^3+\frac{y_3''}{6h_2}(x-x_2)^3+\left[\frac{f_3}{h_2}-\frac{y_3''h_2}{6}\right](x-x_2)+\left[\frac{f_2}{h_2}-\frac{y_2''h_2}{6}\right](x_3-x)$$
$$S_3(x)=\frac{y_3''}{6h_3}(x_4-x)^3+\frac{y_4''}{6h_3}(x-x_3)^3+\left[\frac{f_4}{h_3}-\frac{y_4''h_3}{6}\right](x-x_3)+\left[\frac{f_3}{h_3}-\frac{y_3''h_3}{6}\right](x_4-x)$$
$$S_4(x)=\frac{y_4''}{6h_4}(x_5-x)^3+\frac{y_5''}{6h_4}(x-x_4)^3+\left[\frac{f_5}{h_4}-\frac{y_5''h_4}{6}\right](x-x_4)+\left[\frac{f_4}{h_4}-\frac{y_4''h_4}{6}\right](x_5-x)$$
$$S_5(x)=\frac{y_5''}{6h_5}(x_6-x)^3+\frac{y_6''}{6h_5}(x-x_5)^3+\left[\frac{f_6}{h_5}-\frac{y_6''h_5}{6}\right](x-x_5)+\left[\frac{f_5}{h_5}-\frac{y_5''h_5}{6}\right](x_6-x)$$
$$S_6(x)=\frac{y_6''}{6h_6}(x_7-x)^3+\frac{y_7''}{6h_6}(x-x_6)^3+\left[\frac{f_7}{h_6}-\frac{y_7''h_6}{6}\right](x-x_6)+\left[\frac{f_6}{h_6}-\frac{y_6''h_6}{6}\right](x_7-x)$$
$$S_7(x)=\frac{y_7''}{6h_7}(x_8-x)^3+\frac{y_8''}{6h_7}(x-x_7)^3+\left[\frac{f_8}{h_7}-\frac{y_8''h_7}{6}\right](x-x_7)+\left[\frac{f_7}{h_7}-\frac{y_7''h_7}{6}\right](x_8-x)$$
$$S_8(x)=\frac{y_8''}{6h_8}(x_9-x)^3+\frac{y_9''}{6h_8}(x-x_8)^3+\left[\frac{f_9}{h_8}-\frac{y_9''h_8}{6}\right](x-x_8)+\left[\frac{f_8}{h_8}-\frac{y_8''h_8}{6}\right](x_9-x)$$
$$S_9(x)=\frac{y_9''}{6h_9}(x_{10}-x)^3+\frac{y_{10}''}{6h_9}(x-x_9)^3+\left[\frac{f_{10}}{h_9}-\frac{y_{10}''h_9}{6}\right](x-x_9)+\left[\frac{f_9}{h_9}-\frac{y_9''h_9}{6}\right](x_{10}-x)$$

Θεωρείται ότι $y_0''=y_{10}''=0$ ενώ τα υπόλοιπα y_j'' υπολογίζονται από την επίλυση του τριδιαγώνιου συστήματος $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}''=\boldsymbol{b}$ όπου:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 2(h_3+h_4) & h_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 & 2(h_4+h_5) & h_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_5 & 2(h_5+h_6) & h_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_6 & 2(h_6+h_7) & h_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_7 & 2(h_7+h_8) & h_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_8 & 2(h_8+h_9) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}^T=6\left[\frac{\Delta f_1}{h_1}-\frac{\Delta f_0}{h_0}\quad \frac{\Delta f_2}{h_2}-\frac{\Delta f_1}{h_1}\quad \frac{\Delta f_3}{h_3}-\frac{\Delta f_2}{h_2}\quad \frac{\Delta f_4}{h_4}-\frac{\Delta f_3}{h_3}\quad \frac{\Delta f_5}{h_5}-\frac{\Delta f_4}{h_4}\quad \frac{\Delta f_6}{h_6}-\frac{\Delta f_5}{h_5}\quad \frac{\Delta f_7}{h_7}-\frac{\Delta f_6}{h_6}\quad \frac{\Delta f_8}{h_8}-\frac{\Delta f_7}{h_7}\quad \frac{\Delta f_9}{h_9}-\frac{\Delta f_8}{h_8}\right]$$

$$\boldsymbol{y}''^T=\left[y_1''\quad y_2''\quad y_3''\quad y_4''\quad y_5''\quad y_6''\quad y_7''\quad y_8''\quad y_9''\right]$$

Ο κώδικας σε Mathematica για την παρεμβολή με κυβικές splines δίνεται παρακάτω:

```
xi={0.9,1.3,1.9,2.1,2.6,3.0,3.9,4.4,4.7,5.0,6.0};
fi={1.3,1.5,1.85,2.1,2.6,2.7,2.4,2.15,2.05,2.1,2.25};
hi=ConstantArray[0,Length[xi]-1];
Dfi=ConstantArray[0,Length[xi]-1];
Do[hi[[i]]=xi[[i+1]]-xi[[i]],{i,Length[hi]}];
Do[Dfi[[i]]=fi[[i+1]]-fi[[i]],{i,Length[Dfi]}];
n=Length[xi]-2;
A=ConstantArray[0,{n,n}];
b=ConstantArray[0,n];
```

```
A[[1,1]]=2.*(hi[[1]]+hi[[2]]); A[[1,2]]=hi[[2]];
Do[A[[i,i-1]]=hi[[i]];
  A[[i,i]]=2.*(hi[[i]]+hi[[i+1]]);
  A[[i,i+1]]=hi[[i+1]];,{i,2,n-1}];
A[[n,n-1]]=hi[[n]];  A[[n,n]]=2.(hi[[n]]+hi[[n+1]]);
Do[b[[i]]=6*(Dfi[[i+1]]/hi[[i+1]]-Dfi[[i]]/hi[[i]]),{i,n}];
Sol=LinearSolve[A,b]//N;
y=ConstantArray[0,Length[xi]];
Do[y[[i+1]]=Sol[[i]],{i,n}];
S=ConstantArray[0,Length[xi]-1];
Do[S[[i]]=Expand[y[[i]]/6./hi[[i]]*(xi[[i+1]]-x)^3+y[[i+1]]/6./hi[[i]]*(x-
xi[[i]])^3+(fi[[i+1]]/hi[[i]]-y[[i+1]]*hi[[i]]/6.)*(x-xi[[i]])+(fi[[i
]]/hi[[i]]-y[[i ]]*hi[[i]]/6.)*(xi[[i+1]]-x)],{i,Length[S]}]
Do[Print["S",i-1,"(x)=",S[[i]]],{i,Length[S]}]
Plots=ConstantArray[0,Length[S]];
InterpPoints=Table[{xi[[i]],fi[[i]]},{i,Length[xi]}];
Do[Plots[[i]]=Plot[S[[i]],{x,xi[[i]],xi[[i+1]]}],{i,Length[S]}];
Show[ListPlot[InterpPoints,PlotStyle->Red],Plots,PlotLabel->None,LabelStyle-
>{14,GrayLevel[0],Bold}]
```

Με βάση τον παραπάνω κώδικα και τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει ότι το τριδιαγώνιο γραμμικό και η λύση του ως:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 1.6 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1.4 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1.8 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 2.6 & 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 2.8 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1.6 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 1.2 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 2.6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 0.5 \\ 4.0 \\ -1.5 \\ -4.5 \\ -3.5 \\ -1.0 \\ 1.0 \\ 3.0 \\ -0.1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{y}''=\begin{bmatrix} -0.594367 \\ 2.814526 \\ -0.733140 \\ -2.073018 \\ -1.004994 \\ -0.064231 \\ 0.1686845 \\ 2.5407347 \\ -0.331623 \end{bmatrix}$$

Ενώ τα πολυώνυμα που προκύπτουν στα αντίστοιχα υποδιαστήματα είναι:

$$S_0(x)=0.994875-0.0621636x+0.668653x^2-0.247649x^3$$

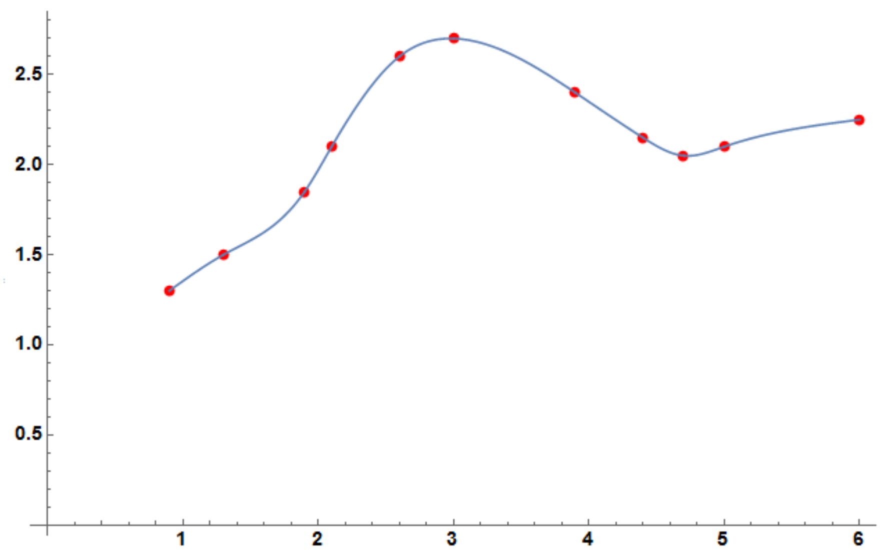
$$S_1(x)=-1.62958+5.99426x-3.99014x^2+0.946912x^3$$

$$S_2(x)=25.1431-36.2785x+18.2587x^2-2.95639x^3$$

$$S_3(x)=1.90025-3.07432x+2.44717x^2-0.446626x^3$$

$$S_4(x) = -13.7711 + 15.0080x - 4.50759x^2 + 0.445001x^3$$
$$S_5(x) = -6.45969 + 7.69656x - 2.07044x^2 + 0.174215x^3$$
$$S_6(x) = -0.730851 + 3.28980x - 0.940487 = x^2 + 0.0776386x^3$$
$$S_7(x) = -106.373 + 75.3187x - 17.3107x^2 + 1.31781x^3$$
$$S_8(x) = 196.121 - 117.763x + 23.7705x^2 - 1.59575x^3$$
$$S_9(x) = -10.2568 + 6.06395x - 0.994870x^2 + 0.0552705x^3$$

Η γραφική παράσταση των παραπάνω πολυωνύμων στα διάφορα υποδιαστήματα συναρτήσει των αρχικών σημείων παρεμβολής απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



<u>Άσκηση 3</u>

Να εφαρμοσθεί η μέθοδος των ελάχιστων τετραγώνων επιλέγοντας α) πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού και β) πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού στον παρακάτω πίνακα δεδομένων:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x_i)$	1.3	3.5	4.2	5	7	8.8	10.1	12.5	13	15.6

Απάντηση:

Ο κώδικας που εφαρμόζει την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων για πολυώνυμο οποιουδήποτε βαθμού m σε Mathematica δίνεται παρακάτω:

```
m=2;
m=m+1;
xi={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10};
fi={1.3,3.5,4.2,5,7,8.8,10.1,12.5,13,15.6};
A=ConstantArray[0,{m,m}];
b=ConstantArray[0,m];
xpar=ConstantArray[0,m];
Do[A[[i,j]]=Sum[xi[[k]]^(i+j-2),{k,Length[xi]}],{i,m},{j,m}];
Do[b[[i]]=Sum[xi[[k]]^(i-1)*fi[[k]],{k,Length[xi]}],{i,m}];
Do[xpar[[i]]=x^(i-1),{i,m}];
ai=LinearSolve[A,b];
Pol=Sum[ai[[i]]*xpar[[i]],{i,m}];
Print["P(x)=",Pol]
InterpData=Table[{xi[[i]],fi[[i]]},{i,Length[xi]}];
S=Sum[(fi[[i]]-Pol/.{x->xi[[i]]})^2.,{i,Length[xi]}];
Print["S=",S]
Show[ListPlot[InterpData,PlotStyle-
>Red],Plot[Pol,{x,Min[xi],Max[xi]}],PlotLabel->None,LabelStyle-
>{14,GrayLevel[0],Bold}]
```

Ο αντίστοιχος κώδικας σε Fortran είναι:

```
Program LeastSquares
integer::i,j,n,m,deg
real*8::sum,S,Intf
real*8,allocatable::x(:),f(:),a(:,:),l(:,:),y(:),coeff(:)

!Definition of data for interpolation
n=10  !Number of data points
allocate(x(n),f(n))
x=(/1,2,3,4,5,6,7,8,9,10/)
f=(/1.3,3.5,4.2,5.,7.,8.8,10.1,12.5,13.,15.6/)

!Definition of the intepolating polynomial
deg=2       !Degree of intepolating polynomail
m=deg+1
allocate(a(m,m+1),l(m,m),y(m),coeff(m))

!Construct the linear system for the least square method
do i=1,m
    do j=1,m
        sum=0.
        do k=1,n
            sum=sum+x(k)**(i+j-2.)
        enddo
        a(i,j)=sum
    enddo

    sum=0
    do k=1,n
        sum=sum+x(k)**(i-1)*f(k)
    enddo
    a(i,m+1)=sum
enddo

!Solution of the linear system using the Cholesky method
!Find lower diagonal matrice L
l=0.
l(1,1)=sqrt(a(1,1))
do i=2,m
    !Computations below the diagonal
    do j=1,i-1
        sum=0.
        do k=1,j-1
            sum=sum+l(j,k)*l(i,k)
        end do
        l(i,j)=(a(i,j)-sum)/l(j,j)
    end do
    !Computations for the diagonal
    sum=0.
    do k=1,i-1
        sum=sum+l(i,k)**2
    end do
    l(i,i)=sqrt(a(i,i)-sum)
end do
```

```
!Backsubstitution for L*y=b
y(1)=a(1,m+1)/l(1,1)
do i=2,m
    sum=0.
    do j=1,i-1
        sum=sum+l(i,j)*y(j)
    end do
    y(i)=(a(i,m+1)-sum)/l(i,i)
end do

!Backsubstitution for Transpose(L)*coeff=y
coeff(m)=y(m)/l(m,m)
do i=m-1,1,-1
    sum=0.
    do j=m,i+1,-1
        sum=sum+l(j,i)*coeff(j)
    end do
    coeff(i)=(y(i)-sum)/l(i,i)
end do

S=0.
do i=1,n
    Intf=0.
    do j=0,deg
    Intf=Intf+coeff(j+1)*x(i)**j
    enddo
    S=S+(f(i)-Intf)**2.
enddo

write(*,"(A)") "The interpolation polynomial is:"
write(*,"(A)",advance="no") "P(x)="
do i=0,deg
    if (coeff(i+1)>=0.) then
        write(*,"(A,ES11.5,A,I0)",advance="no")
"+",isign(coeff(i+1),1.),"*x^",i
    else
        write(*,"(A,ES11.5,A,I0)",advance="no") "-
",isign(coeff(i+1),1.),"*x^",i
    endif
enddo
write(*,"(/)")
write(*,"(A,F10.4)") "with S=",S
write(*,"(/)")

end
```

3α. Πολυώνυμο 2ου βαθμού.

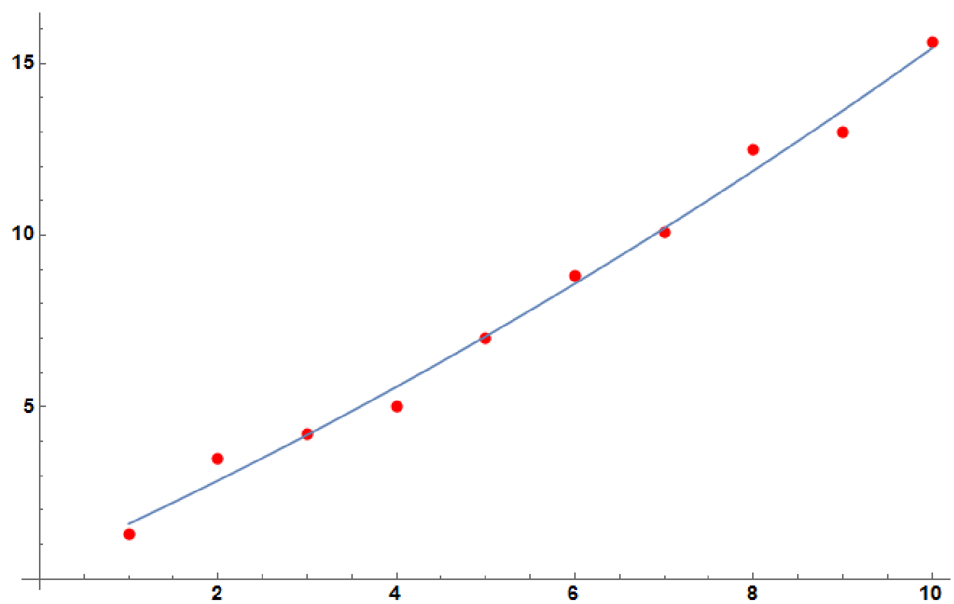
Με βάση τους παραπάνω κώδικες και επιλέγοντας ένα πολυώνυμο 2ου βαθμού το σύστημα που προκύπτει είναι:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} f_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f_i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 55 & 385 \\ 55 & 385 & 3025 \\ 385 & 3025 & 25333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 \\ 572.4 \\ 4532.8 \end{bmatrix}$$

Το πολυώνυμο που προκύπτει από την επίλυση του παραπάνω συστήματος είναι:

$$P_2(x) = 0.406667 + 1.15485x + 0.0348485x^2, \quad S = \sum_{i=1}^{n} \left(f_i - P_i(x_i) \right)^2 = 1.70352$$

Η γραφική παράσταση του πολυωνύμου 2ου βαθμού συναρτήσει των αρχικών σημείων παρεμβολής απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



3β. Πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού.

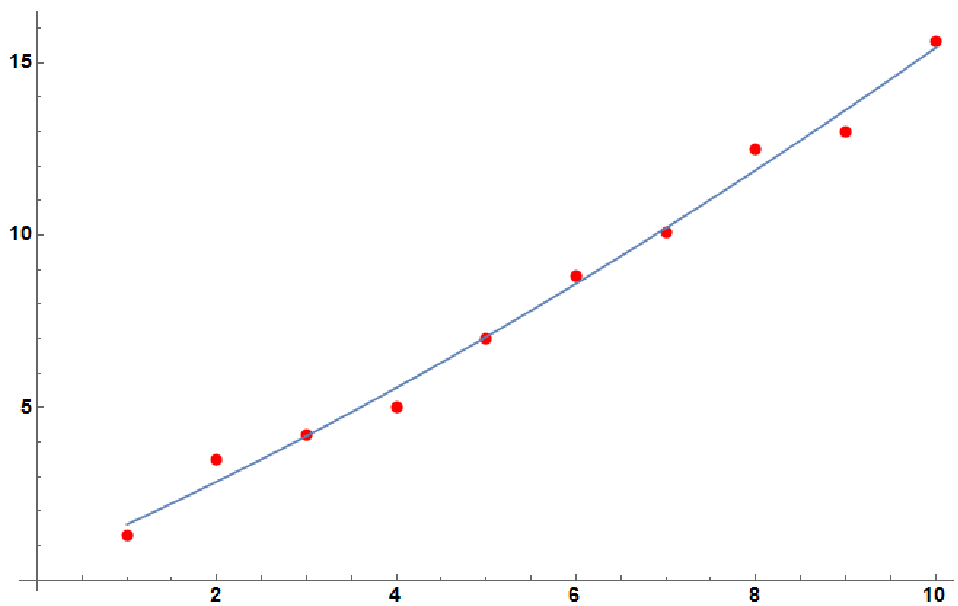
Με βάση τους παραπάνω κώδικες και επιλέγοντας ένα πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού το σύστημα που προκύπτει είναι:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \sum_{i=1}^{n} x_i^5 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \sum_{i=1}^{n} x_i^5 & \sum_{i=1}^{n} x_i^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^{2} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^{3} y_i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 55 & 385 & 3025 \\ 55 & 385 & 3025 & 25333 \\ 385 & 3025 & 25333 & 220825 \\ 3025 & 25333 & 220825 & 1978405 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 \\ 572.4 \\ 4532.8 \\ 38179.8 \end{bmatrix}$$

Το πολυώνυμο που προκύπτει από την επίλυση του παραπάνω συστήματος είναι:

$$P_3(x) = 0.45 + 1.11641x + 0.0431818x^2 - 0.000505051x^3, \quad S = \sum_{i=1}^{n} \left(f_i - P_i(x_i) \right)^2 = 1.7027$$

Η γραφική παράσταση του πολυωνύμου 3^{ου} βαθμού συναρτήσει των αρχικών σημείων παρεμβολής απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



Παρατηρείται ότι το πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού δεν προσφέρει σημαντική μείωση του S και άρα η επιλογή ενός πολυωνύμου παρεμβολή 2^{ου} βαθμού είναι επαρκής για τα συγκεκριμένα δεδομένα. Επισημαίνεται επίσης ότι περεταίρω αύξηση του βαθμού του πολυωνύμου παρεμβολής οδηγεί σε γραμμικό σύστημα κακής κατάστασης και η Mathematica ειδοποιεί ότι η επίλυση του μπορεί να περιέχει σημαντικά αριθμητικά σφάλματα

Άσκηση 4

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sin x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Με βάση τα σημεία $x_0=-\frac{\pi}{2}, x_1=0, x_2=\frac{\pi}{2}$ και τις αντίστοιχες τιμές $f_0=-1, f_1=0, f_2=1$ εφαρμόστε α) παρεμβολή Lagrange και β) παρεμβολή κυβικών splines και βρείτε τα πολυώνυμα παρεμβολής. Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας. γ) Λαμβάνοντας υπόψη ότι $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ (επιπλέον δεδομένα) εφαρμόστε τη μέθοδο παρεμβολής κυβικών splines ελαφρώς τροποποιημένη και βρείτε τα πολυώνυμα παρεμβολής. Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας ως προς τη σημαντικότητα των επιπλέον δεδομένων και προτείνετε επιγραμματικά τρόπους βελτίωσης των παραπάνω αποτελεσμάτων.

Απάντηση:

4α. Παρεμβολή Lagrange: $P_2(x)=L_0(x)f_0+L_1(x)f_1+L_2(x)f_2=-L_0(x)+L_2(x)$

$$L_0(x)=\frac{(x-0)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(-\frac{\pi}{2}-0\right)\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{2}{\pi^2}x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\qquad L_2(x)=\frac{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)(x-0)}{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}-0\right)}=\frac{2}{\pi^2}x\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$P_2(x)=-\frac{2}{\pi^2}x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{2}{\pi^2}x\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad P_2(x)=\frac{2}{\pi}x$$

4β. Παρεμβολή κυβικών splines: $S_0(x)=?$ και $S_1(x)=?$ $\quad h_0=h_1=\pi/2\quad \Delta f_0=\Delta f_1=1$

$$S_0(x)=\frac{y_0''}{6h_0}(x_1-x)^3+\frac{y_1''}{6h_0}(x-x_0)^3+\left[\frac{f_1}{h_0}-\frac{y_1''\,h_0}{6}\right](x-x_0)+\left[\frac{f_0}{h_0}-\frac{y_0''\,h_0}{6}\right](x_1-x)$$

$$S_1(x)=\frac{y_1''}{6h_1}(x_2-x)^3+\frac{y_2''}{6h_1}(x-x_1)^3+\left[\frac{f_2}{h_1}-\frac{y_2''\,h_1}{6}\right](x-x_1)+\left[\frac{f_1}{h_1}-\frac{y_1''\,h_1}{6}\right](x_2-x)$$

Θεωρώντας επίσης τις συμπληρωματικές συνθήκες $y_0''=y_2''=0$ το τριδιαγώνιο σύστημα ανάγεται σε μία εξίσωση με μόνο άγνωστο το y_1'' :

$$2(h_0+h_1)y_1''=6\left(\frac{\Delta f_1}{h_1}-\frac{\Delta f_0}{h_0}\right)\quad\Rightarrow\quad y_1''=0\quad\Rightarrow$$

$$S_0(x)=\left[\frac{f_1}{h_0}\right](x-x_0)+\left[\frac{f_0}{h_0}\right](x_1-x)=\left[-\frac{2}{\pi}\right](-x)\quad\Rightarrow\quad S_0(x)=\frac{2}{\pi}x\ ,\quad x\in[-\pi/2,0]$$

$$S_1(x)=\left[\frac{f_2}{h_1}\right](x-x_1)+\left[\frac{f_1}{h_1}\right](x_2-x)=\left[\frac{2}{\pi}\right](x)\quad\Rightarrow\quad S_1(x)=\frac{2}{\pi}x\ ,\quad x\in[0,\pi/2]$$

Και οι δύο παρεμβολές οδηγούν ακριβώς στο ίδιο πολυώνυμο 1ης τάξης στο διάστημα $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

4γ. Παρεμβολή κυβικών splines με επιπλέον δεδομένα:

Οι συμπληρωματικές συνθήκες $y_0'' = y_2'' = 0$ αντικαθίστανται από τις $y_0' = y_2' = 0$.

$$S_0'(x) = -\frac{y_0''}{2h_0}(x_1 - x)^2 + \frac{y_1''}{2h_0}(x - x_0)^2 + \frac{\Delta f_0}{h_0} - \frac{h_0}{6}(y_1'' - y_0'') \Rightarrow 0 = -\frac{y_0''}{2h_0}(x_1 - x_0)^2 + \frac{\Delta f_0}{h_0} - \frac{h_0}{6}(y_1'' - y_0'')$$

$$S_1'(x) = -\frac{y_1''}{2h_1}(x_2 - x)^2 + \frac{y_2''}{2h_1}(x - x_1)^2 + \frac{\Delta f_1}{h_1} - \frac{h_1}{6}(y_2'' - y_1'') \Rightarrow 0 = \frac{y_2''}{2h_1}(x_2 - x_1)^2 + \frac{\Delta f_1}{h_1} - \frac{h_1}{6}(y_2'' - y_1'')$$

Η 3η εξίσωση είναι από το προκύπτον τριδιαγώνιο σύστημα αλλά χωρίς την υπόθεση $y_0'' = y_2'' = 0$:

$$h_0 y_0'' + 2(h_0 + h_1) y_1'' + h_1 y_2'' = 6\left[\frac{\Delta f_1}{h_1} - \frac{\Delta f_0}{h_0}\right]$$

Το σύστημα επιλύεται για τους αγνώστους y_0'', y_1'', y_2'':

$$0 = -y_0''\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{12}(y_1'' - y_0'') \Rightarrow y_0'' = -\frac{1}{2}y_1'' + \frac{12}{\pi^2}$$

$$0 = y_2''\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{12}(y_2'' - y_1'') \Rightarrow y_2'' = \frac{1}{2}y_1'' - \frac{12}{\pi^2}$$

$$h_0 y_0'' + 2(h_0 + h_1) y_1'' + h_1 y_2'' = 6\left[\frac{\Delta f_1}{h_1} - \frac{\Delta f_0}{h_0}\right] \Rightarrow \frac{2}{\pi}y_0'' + \frac{8}{\pi}y_1'' + \frac{2}{\pi}y_2'' = 0 \Rightarrow -\frac{1}{\pi}y_1'' + \frac{24}{\pi^3} + \frac{8}{\pi}y_1'' + \frac{1}{\pi}y_1'' - \frac{24}{\pi^3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1'' = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0'' = \frac{12}{\pi^2} \quad \text{και} \Rightarrow y_2'' = -\frac{12}{\pi^2}$$

$$S_0(x) = \frac{y_0''}{6h_0}(x_1 - x)^3 + \left[\frac{f_0}{h_0} - \frac{y_0''\, h_0}{6}\right](x_1 - x) \quad \Rightarrow \quad S_0(x) = -\frac{4}{\pi^3}x^3 + \frac{3}{\pi}x \qquad x \in [-\pi/2, 0]$$

$$S_1(x) = \frac{y_2''}{6h_1}(x - x_1)^3 + \left[\frac{f_2}{h_1} - \frac{y_2''\, h_1}{6}\right](x - x_1) \quad \Rightarrow \quad S_1(x) = -\frac{4}{\pi^3}x^3 + \frac{3}{\pi}x \qquad x \in [0, \pi/2]$$

Το αποτέλεσμα βελτιώνεται σημαντικά αφού τα πολυώνυμα 3ης τάξης προσεγγίζουν καλύτερα την ημιτονοειδή συνάρτηση. Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να βελτιωθούν σημαντικά επιλέγοντας περισσότερα σημεία παρεμβολής ή επιλέγοντας ως συνάρτηση βάσης την ημιτονοειδή συνάρτηση.

Άσκηση 5

Έστω τα δεδομένα $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Διατυπώστε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για την εύρεση της συνάρτησης παρεμβολής $y(x) = af(x) + bg(x)$ όπου $f(x)$ και $g(x)$ είναι γνωστές συναρτήσεις.

$d_i = y_i - y(x_i)$ και $S = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - y(x_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - af(x_i) - bg(x_i)\right)^2 \Rightarrow$

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i^2 + a^2 f^2(x_i) + b^2 g^2(x_i) + 2abf(x_i)g(x_i) - 2af(x_i)y_i - 2bg(x_i)y_i \right]$$

$$\frac{dS}{da} = \sum_{i=1}^{n} \left[2af^2(x_i) + 2bf(x_i)g(x_i) - 2y_i f(x_i) \right] = 0 \Rightarrow a\sum_{i=1}^{n} f^2(x_i) + b\sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i) - \sum_{i=1}^{n} y_i f(x_i) = 0$$

$$\frac{dS}{db} = \sum_{i=1}^{n} \left[2bg^2(x_i) + 2af(x_i)g(x_i) - 2y_i g(x_i) \right] = 0 \Rightarrow b\sum_{i=1}^{n} g^2(x_i) + a\sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i) - \sum_{i=1}^{n} y_i g(x_i) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} a\sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i)\right]^2 + b\sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i f(x_i)\right) \\ a\sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i) + b\sum_{i=1}^{n} \left[g(x_i)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i g(x_i)\right) \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} aK_{11} + bK_{12} = \Lambda_1 \\ aK_{12} + bK_{22} = \Lambda_2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a = \dfrac{\Lambda_1 K_{22} - \Lambda_2 K_{12}}{K_{11}K_{22} - K_{12}^2} \\ b = \dfrac{\Lambda_2 K_{11} - \Lambda_1 K_{12}}{K_{11}K_{22} - K_{12}^2} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} a = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i f(x_i)\right)\sum_{i=1}^{n}\left[g(x_i)\right]^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(y_i g(x_i)\right)\sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)\right]^2\sum_{i=1}^{n}\left[g(x_i)\right]^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i)\right]^2} \\ b = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i g(x_i)\right)\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)\right]^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(y_i f(x_i)\right)\sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)\right]^2\sum_{i=1}^{n}\left[g(x_i)\right]^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i)\right]^2} \end{array}$$