Παράδειγμα #5
ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΜΕΘΟΔΟ NEWTON
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Ν. Βασιλειάδης

Άσκηση 1

Να επιλυθεί το παρακάτω μη γραμμικό σύστημα με την μέθοδο Newton:

$$f_1\left(x_1, x_2\right) = x_1 + x_2 - 2 = 0$$
$$f_2\left(x_1, x_2\right) = x_1^3 + x_2^3 - 8 = 0$$

Να χρησιμοποιηθεί κριτήριο τερματισμού: $\varepsilon = \frac{1}{N}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right)^2} < 10^{-5}$

Απάντηση:

Επειδή το μη-γραμμικό σύστημα είναι απλό μπορεί να λυθεί αναλυτικά με Mathematica ως:

```
f1 = x1 + x2 - 2;
f2 = x1^3 + x2^3 - 8;
Solve[{f1== 0, f2 == 0}, {x1, x2}]
```

Προκύπτουν 2 αναλυτικές λύσεις:

```
{{x1 -> 0, x2 -> 2},
 {x1 -> 2, x2 -> 0}}
```

Ο κώδικας που επιλύει το παραπάνω μη γραμμικό σύστημα σε Fortran είναι:

```
program Newton_2x2
implicit none
integer,parameter::n=2
integer::i,j,iter,maxiter
real*8:: Det,Det1,Det2,rel,err,tstart,tend
real*8::xold(n),xnew(n)

!Find program start time
call cpu_time(tstart)

!Open output file
open (100,file="Newton2x2_results.dat")

!Definition of Newton parameters
maxiter=10000
rel=1d-5
xold(1)=0 ; xold(2)=0.5

err=1.
iter=0
!Write initial guess to output file
write(100,"(A)")  "---------------------------------"
write(100,"(A,)") "--------- Initial guess ----------"
write(100,"(A)")  "---------------------------------"
```

```
do i=1,n
    write(100,"(2(A,I0),A,ES20.10)") "x",iter,"(",i,")=",xold(i)
end do

!Computations for the Jacobi method
do while (iter<=maxiter .and. err>=rel)
    !Find new x
    Det1=f1(xold(1),xold(2))*df2x2(xold(1),xold(2))-
f2(xold(1),xold(2))*df1x2(xold(1),xold(2))
    Det2=f2(xold(1),xold(2))*df1x1(xold(1),xold(2))-
f1(xold(1),xold(2))*df2x1(xold(1),xold(2))
    Det=df1x1(xold(1),xold(2))*df2x2(xold(1),xold(2))-
df1x2(xold(1),xold(2))*df2x1(xold(1),xold(2))
    xnew(1)=xold(1)-Det1/Det
    xnew(2)=xold(2)-Det2/Det
    !Find error
    err = sqrt(sum((xnew-xold)**2))/n
    xold = xnew
    iter=iter+1
    !Write results to output file
    write(100,"(A)") "---------------------------------"
    write(100,"(A,I5,A)") "--------- Iteration ",iter," ---------"
    write(100,"(A)") "---------------------------------"
    write(100,"(A,ES15.5)") "The error is : ",err
    do i=1,n
        write(100,"(2(A,I0),A,ES20.10)") "x",iter,"(",i,")=",xnew(i)
    end do
end do
!Write results to screen
If (iter>maxiter) then
    write(*,"(A)") "For x in each iteration open file
Newton2x2_results.dat..."
    write(*,*)
    write(*,"(A,I0,A)") "Solution didn't converge after: ",iter,"
iterations."
else
    write(*,"(A)") "For x in each iteration open file Newton2x2.dat..."
    write(*,*)
    write(*,"(A,I0,A,ES12.4)") "Solution converged after: ",iter," iterations
with error: ",err
    write(*,"(A)") "Solution of non-linear system given below:"
    do i=1,n
        write(*,"(A2,I0,,A2,ES20.10)")"x(",i,")=",xnew(i)
    end do
endif
!Find program end time
call cpu_time(tend)
write(*,"(A,ES14.4,2X,A)") "Program has used", tend-tstart,"seconds of CPU
time."
write(100,"(A)") "----------------------------------------------------"
write(100,"(A,ES14.4,2X,A)") "Program has used", tend-tstart,"seconds of CPU
time."
```

```
!Close output file
close(100)

Contains

real*8 function f1(x1,x2)
real*8::x1,x2
f1=x1+x2-2.
end function f1
real*8 function f2(x1,x2)
real*8::x1,x2
f2=x1**3.+x2**3.-8.
end function f2
real*8 function df1x1(x1,x2)
real*8::x1,x2
df1x1=1.
end function df1x1
real*8 function df1x2(x1,x2)
real*8::x1,x2
df1x2=1.
end function df1x2
real*8 function df2x1(x1,x2)
real*8::x1,x2
df2x1=3.*x1**2.
end function df2x1
real*8 function df2x2(x1,x2)
real*8::x1,x2
df2x2=3.*x2**2.
end function df2x2
end
```

Από την μορφή του μη γραμμικού συστήματος προκύπτει ότι $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = -3x_1^2 + 3x_2^2$.

Για να αποφθεχθεί διαίρεση με μηδέν θα πρέπει στην αρχική εκτίμηση να ισχύει $x_1^{(0)} \neq \pm x_2^{(0)}$.

Ο παραπάνω κώδικας για αρχική εκτίμηση $x^{(0)} = (0,1)$ συγκλίνει μετά από 6 επαναλήψεις στη πρώτη λύση με σφάλμα 6.074×10^{-7}. Τα αποτελέσματα του κώδικα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

	Αριθμός επαναλήψεων						
	0	1	2	3	4	5	6
x_1	0.000000	-1.333333	-0.380952	-0.052545	-0.001312	-0.000001	0.000000
x_2	1.000000	3.333333	2.380952	2.052545	2.001312	2.000001	2.000000

Για την δεύτερη λύση ο παραπάνω κώδικας για αρχική εκτίμηση $x^{(0)} = (1,0)$ συγκλίνει μετά από 6 επαναλήψεις με σφάλμα 6.074×10^{-7}. Τα αποτελέσματα του κώδικα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

	Αριθμός επαναλήψεων						
	0	1	2	3	4	5	6
x_1	1.000000	3.333333	2.380952	2.052545	2.001312	2.000001	2.000000
x_2	0.000000	-1.333333	-0.380952	-0.052545	-0.001312	-0.000001	0.000000

Άσκηση 2

Να επιλυθεί το παρακάτω μη γραμμικό σύστημα με την μέθοδο Newton:

$$\begin{aligned} 2x_1^2 + 3x_2^3 - 4x_3 &= 1 \\ 5x_1 - 2x_2^2 + x_3 &= -7 \\ 9x_2 + 5x_3^5 &= 9 \end{aligned}$$

Να χρησιμοποιηθεί κριτήριο τερματισμού: $\varepsilon = \dfrac{1}{N}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right)^2} < 10^{-6}$

Απάντηση:

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα με Mathematica προκύπτουν 20 λύσεις εκ των οποίων οι 2 είναι πραγματικές ενώ οι υπόλοιπες 18 μιγαδικές. Στην παρούσα εργασία θα εξεταστούν μόνο πραγματικές λύσεις. Η εύρεση μόνο πραγματικών λύσεων με Mathematica γίνεται ως:

```
NSolve[{2*x1^2 + 3*x2^3 - 4*x3 == 1, 5*x1 - 2*x2^2 + x3 == -7,
  9*x2 + 5*x3^5 == 9}, {x1, x2, x3}, Reals]
```

Με τον παραπάνω κώδικα προκύπτουν οι 2 πραγματικές λύσεις:

```
{{x1 -> 40.1994, x2 -> -10.2426, x3 -> 1.82485},
 {x1 -> -1.46703, x2 -> 0.557031, x3 -> 0.955717}}
```

Ο κώδικας που επιλύει το παραπάνω πρόβλημα σε Mathematica δίνεται παρακάτω.

```
f = {2*x1^2 + 3*x2^3 - 4*x3 - 1, 5*x1 - 2*x2^2 + x3 + 7,
   9*x2 + 5*x3^5 - 9};
xpar = {x1, x2, x3};
spar = {s1, s2, s3};
x0 = {20, -5, 5};
maxiter = 100;
err = 1.*10^-6;
J = Table[D[f[[i]], xpar[[j]]], {i, Length[f]}, {j, Length[f]}];
k = 0;
error = 1.;
While[error > err,
 k = k + 1;
 If[k > maxiter, Break[]];
 roule = Table[xpar[[i]] -> x0[[i]], {i, Length[f]}];
```

```
Jx0 = J /. roule // N;
 Fx0 = f /. roule;
 s = LinearSolve[Jx0, Fx0] // N;
 x0 = x0 - s;
 error = Sqrt[Sum[s[[i]]^2., {i, Length[s]}]]/Length[s] // N;
 Print["--------------------------------"];
 Print["Iteration:", k];
 Print["LinearSystem:", MatrixForm[Jx0], "*", MatrixForm[spar], "=",
  MatrixForm[Fx0]];
 Print["\[Sigma]=", MatrixForm[s]];
 Print["x=", MatrixForm[x0]];
 Print["Error=", error];]
```

Για την εύρεση της πρώτης λύσης επιλέγεται αρχική εκτίμηση $x^{(0)} = (20, -5, 5)$. Η μέθοδος Newton συγκλίνει μετά από 9 επαναλήψεις με σφάλμα 6.7859×10^{-9}. Τα αποτελέσματα του κώδικα σε κάθε επανάληψη παρουσιάζονται παρακάτω:

1^{η} επανάληψη

$$\begin{pmatrix} 80 & 225 & -4 \\ 5 & 20 & 1 \\ 0 & 9 & 15625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^{(0)} \\ \sigma_2^{(0)} \\ \sigma_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 404 \\ 62 \\ 15571 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1^{(0)} \\ \sigma_2^{(0)} \\ \sigma_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11.7202 \\ 5.9804 \\ 0.993099 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31.7202 \\ -10.9804 \\ 4.0069 \end{pmatrix}$$

2^{η} επανάληψη

$$\begin{pmatrix} 126.881 & 1085.12 & -4 \\ 5 & 43.9216 & 1 \\ 0 & 9 & 6444.28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^{(1)} \\ \sigma_2^{(1)} \\ \sigma_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1976.38 \\ -71.5304 \\ 5056.49 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1^{(1)} \\ \sigma_2^{(1)} \\ \sigma_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -55.7438 \\ 4.69952 \\ 0.778085 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87.464 \\ -15.6799 \\ 3.22882 \end{pmatrix}$$

3^{η} επανάληψη

$$\begin{pmatrix} 349.856 & 2212.74 & -4 \\ 5 & 62.7197 & 1 \\ 0 & 9 & 2717.15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^{(2)} \\ \sigma_2^{(2)} \\ \sigma_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3720.8 \\ -44.1711 \\ 1604.51 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1^{(2)} \\ \sigma_2^{(2)} \\ \sigma_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30.571 \\ -3.15096 \\ 0.600951 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56.893 \\ -12.529 \\ 2.62786 \end{pmatrix}$$

4^{η} επανάληψη

$$\begin{pmatrix} 227.572 & 1412.78 & -4 \\ 5 & 50.1159 & 1 \\ 0 & 9 & 1192.21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^{(3)} \\ \sigma_2^{(3)} \\ \sigma_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 561.918 \\ -19.857 \\ 504.831 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1^{(3)} \\ \sigma_2^{(3)} \\ \sigma_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.1115 \\ -1.71305 \\ 0.436374 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43.7815 \\ -10.8159 \\ 2.19149 \end{pmatrix}$$

5^{η} επανάληψη

$$\begin{pmatrix} 175.126 & 1052.86 & -4 \\ 5 & 43.2637 & 1 \\ 0 & 9 & 576.631 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^{(4)} \\ \sigma_2^{(4)} \\ \sigma_3^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28.0044 \\ -5.8691 \\ 146.393 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1^{(4)} \\ \sigma_2^{(4)} \\ \sigma_3^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.33528 \\ -0.527177 \\ 0.262105 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \\ x_3^{(5)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40.4462 \\ -10.2887 \\ 1.92939 \end{pmatrix}$$

6^{η} επανάληψη

$$\begin{pmatrix} 161.785 & 952.723 & -4 \\ 5 & 41.155 & 1 \\ 0 & 9 & 346.431 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1^{(5)} \\ \sigma_2^{(5)} \\ \sigma_3^{(5)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.36547 \\ -0.555832 \\ 32.081 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1^{(5)} \\ \sigma_2^{(5)} \\ \sigma_3^{(5)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.239977 \\ -0.04494 \\ 0.0937718 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(6)} \\ x_2^{(6)} \\ x_3^{(6)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40.2062 \\ -10.2438 \\ 1.83561 \end{pmatrix}$$

7^{η} επανάληψη

$$\begin{pmatrix} 160.825 & 944.419 & -4 \\ 5 & 40.9752 & 1 \\ 0 & 9 & 283.835 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1^{(6)} \\ \sigma_2^{(6)} \\ \sigma_3^{(6)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7.156E-02 \\ -4.039E-03 \\ 3.00793 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1^{(6)} \\ \sigma_2^{(6)} \\ \sigma_3^{(6)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.783E-03 \\ -1.186E-03 \\ 1.064E-02 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(7)} \\ x_2^{(7)} \\ x_3^{(7)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40.1995 \\ -10.2426 \\ 1.82498 \end{pmatrix}$$

8^{η} επανάληψη

$$\begin{pmatrix} 160.798 & 944.2 & -4 \\ 5 & 40.9705 & 1 \\ 0 & 9 & 277.314 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1^{(7)} \\ \sigma_2^{(7)} \\ \sigma_3^{(7)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.762E-05 \\ -2.813E-06 \\ 3.478E-02 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1^{(7)} \\ \sigma_2^{(7)} \\ \sigma_3^{(7)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.526E-05 \\ -1.232E-05 \\ 1.258E-04 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(8)} \\ x_2^{(8)} \\ x_3^{(8)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40.1994 \\ -10.2426 \\ 1.82485 \end{pmatrix}$$

9^{η} επανάληψη

$$\begin{pmatrix} 160.798 & 944.198 & -4 \\ 5 & 40.9704 & 1 \\ 0 & 9 & 277.237 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1^{(8)} \\ \sigma_2^{(8)} \\ \sigma_3^{(8)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.673E-09 \\ -3.038E-10 \\ 4.809E-06 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1^{(8)} \\ \sigma_2^{(8)} \\ \sigma_3^{(8)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.042E-08 \\ -1.704E-09 \\ 1.740E-08 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(9)} \\ x_2^{(9)} \\ x_3^{(9)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40.1994 \\ -10.2426 \\ 1.82485 \end{pmatrix}$$

Για την εύρεση της δεύτερης λύσης επιλέγεται αρχική εκτίμηση $x^{(0)} = (1,1,1)$. Η μέθοδος Newton συγκλίνει μετά από 9 επαναλήψεις με σφάλμα 4.2551×10^{-7}. Τα αποτελέσματα του κώδικα σε κάθε επανάληψη παρουσιάζονται παρακάτω:

1^{η} επανάληψη

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & -4 \\ 5 & -4 & 1 \\ 0 & 9 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1^{(0)} \\ \sigma_2^{(0)} \\ \sigma_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1^{(0)} \\ \sigma_2^{(0)} \\ \sigma_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.66916 \\ -0.562895 \\ 0.402642 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.66916 \\ 1.56289 \\ 0.597358 \end{pmatrix}$$

2^{η} επανάληψη

$$\begin{pmatrix} -2.67662 & 21.9838 & -4 \\ 5 & -6.25158 & 1 \\ 0 & 9 & 3.18331 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1^{(1)} \\ \sigma_2^{(1)} \\ \sigma_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.95888 \\ -0.633701 \\ 5.44637 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1^{(1)} \\ \sigma_2^{(1)} \\ \sigma_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.460104 \\ 0.511645 \\ 0.264369 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.12926 \\ 1.05125 \\ 0.332989 \end{pmatrix}$$

3^{η} επανάληψη

$$\begin{pmatrix} -4.51704 & 9.94614 & -4 \\ 5 & -4.205 & 1 \\ 0 & 9 & 0.307369 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1^{(2)} \\ \sigma_2^{(2)} \\ \sigma_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.70379 \\ -0.523561 \\ 0.481722 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1^{(2)} \\ \sigma_2^{(2)} \\ \sigma_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.141025 \\ 0.0834961 \\ -0.877586 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.27028 \\ 0.967754 \\ 1.21057 \end{pmatrix}$$

$4^{η}$ επανάληψη

$$\begin{pmatrix} -5.08114 & 8.42893 & -4 \\ 5 & -3.87102 & 1 \\ 0 & 9 & 53.6916 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1^{(3)} \\ \sigma_2^{(3)} \\ \sigma_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.10399 \\ -0.013943 \\ 12.7093 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1^{(3)} \\ \sigma_2^{(3)} \\ \sigma_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0785996 \\ 0.159373 \\ 0.209995 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.34888 \\ 0.808381 \\ 1.00058 \end{pmatrix}$$

$5^{η}$ επανάληψη

$$\begin{pmatrix} -5.39554 & 5.88132 & -4 \\ 5 & -3.23352 & 1 \\ 0 & 9 & 25.058 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1^{(4)} \\ \sigma_2^{(4)} \\ \sigma_3^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.221438 \\ -0.0508 \\ 3.28994 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1^{(4)} \\ \sigma_2^{(4)} \\ \sigma_3^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0784513 \\ 0.159866 \\ 0.0738744 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \\ x_3^{(5)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.42734 \\ 0.648515 \\ 0.926705 \end{pmatrix}$$

$6^{η}$ επανάληψη

$$\begin{pmatrix} -5.70934 & 3.78514 & -4 \\ 5 & -2.59406 & 1 \\ 0 & 9 & 18.4377 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1^{(5)} \\ \sigma_2^{(5)} \\ \sigma_3^{(5)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.185991 \\ -0.051114 \\ 0.253899 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1^{(5)} \\ \sigma_2^{(5)} \\ \sigma_3^{(5)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0334276 \\ 0.0752786 \\ -0.0229751 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(6)} \\ x_2^{(6)} \\ x_3^{(6)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.46076 \\ 0.573236 \\ 0.949681 \end{pmatrix}$$

$7^{η}$ επανάληψη

$$\begin{pmatrix} -5.84305 & 2.9574 & -4 \\ 5 & -2.29295 & 1 \\ 0 & 9 & 20.3353 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1^{(6)} \\ \sigma_2^{(6)} \\ \sigma_3^{(6)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0340305 \\ -0.011334 \\ 0.0215317 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1^{(6)} \\ \sigma_2^{(6)} \\ \sigma_3^{(6)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00602087 \\ 0.0155352 \\ -0.00581674 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(7)} \\ x_2^{(7)} \\ x_3^{(7)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.46678 \\ 0.557701 \\ 0.955497 \end{pmatrix}$$

$8^{η}$ επανάληψη

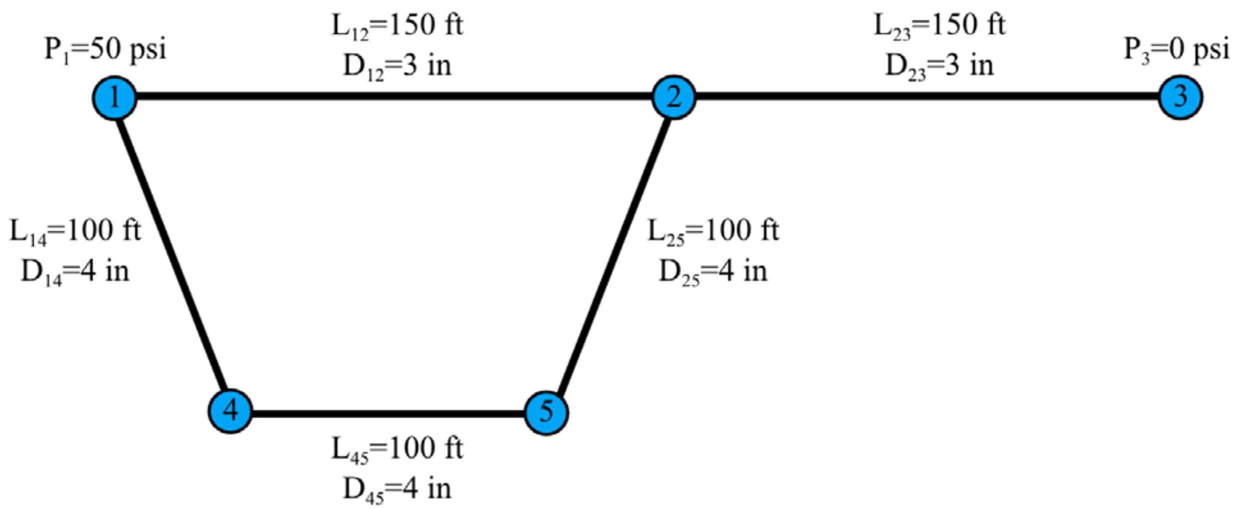
$$\begin{pmatrix} -5.86714 & 2.79928 & -4 \\ 5 & -2.2308 & 1 \\ 0 & 9 & 20.8381 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1^{(7)} \\ \sigma_2^{(7)} \\ \sigma_3^{(7)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.306E-03 \\ -4.827E-04 \\ 1.458E-03 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1^{(7)} \\ \sigma_2^{(7)} \\ \sigma_3^{(7)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.456E-04 \\ 6.687E-04 \\ -2.188E-04 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(8)} \\ x_2^{(8)} \\ x_3^{(8)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.46703 \\ 0.557033 \\ 0.955716 \end{pmatrix}$$

$9^{η}$ επανάληψη

$$\begin{pmatrix} -5.86812 & 2.79257 & -4 \\ 5 & -2.22813 & 1 \\ 0 & 9 & 20.8572 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1^{(8)} \\ \sigma_2^{(8)} \\ \sigma_3^{(8)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.364E-06 \\ -8.942E-07 \\ 2.089E-06 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1^{(8)} \\ \sigma_2^{(8)} \\ \sigma_3^{(8)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.093E-07 \\ 1.143E-06 \\ -3.932E-07 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(9)} \\ x_2^{(9)} \\ x_3^{(9)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.46703 \\ 0.557031 \\ 0.955717 \end{pmatrix}$$

<u>Άσκηση 3</u>

Θεωρήστε το δίκτυο σωληνώσεων του παρακάτω σχήματος.



Σε κάθε κόμβο όπου δεν είναι γνωστή η πίεση ισχύει η σχέση

$$\sum_i Q_{ij} = \sum_i \left(P_i - P_j\right)\sqrt{\frac{1}{C_{ij}\left|P_i - P_j\right|}} = 0$$

όπου $C_{ij} = CL_{ij} / D_{ij}^5$ και $C = 6\times 10^{-4}$. Να βρεθούν με την μέθοδο Newton οι πιέσεις των κόμβων 2, 4 και 5. Με βάση τις πιέσεις του δικτύου να βρεθούν οι παροχές Q_{12}, Q_{14}, Q_{23}, Q_{25}, Q_{45}.

Να χρησιμοποιηθεί κριτήριο τερματισμού: $\varepsilon = \frac{1}{N}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right)^2} < 10^{-6}$

Απάντηση:

Αρχικά γράφονται οι εξισώσεις για τους κόμβους 2, 4 και 5 ως:

$$\left(P_2 - P_1\right)\sqrt{\frac{D_{12}^5}{CL_{12}\left|P_2 - P_1\right|}} + \left(P_2 - P_3\right)\sqrt{\frac{D_{23}^5}{CL_{23}\left|P_2 - P_3\right|}} + \left(P_2 - P_5\right)\sqrt{\frac{D_{25}^5}{CL_{23}\left|P_2 - P_5\right|}} = 0$$

$$\left(P_4 - P_1\right)\sqrt{\frac{D_{14}^5}{CL_{14}\left|P_4 - P_1\right|}} + \left(P_4 - P_5\right)\sqrt{\frac{D_{45}^5}{CL_{45}\left|P_4 - P_5\right|}} = 0$$

$$\left(P_5 - P_2\right)\sqrt{\frac{D_{25}^5}{CL_{25}\left|P_5 - P_2\right|}} + \left(P_5 - P_4\right)\sqrt{\frac{D_{45}^5}{CL_{45}\left|P_5 - P_4\right|}} = 0$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα του παραπάνω δικτύου προκύπτει το μη-γραμμικό σύστημα:

$$\frac{51.9615\left(P_2-50\right)}{\sqrt{\left|P_2-50\right|}}+\frac{51.9615P_2}{\sqrt{\left|P_2\right|}}+\frac{130.639\left(P_2-P_5\right)}{\sqrt{\left|P_2-P_5\right|}}=0$$

$$\frac{\left(P_4-50\right)}{\sqrt{\left|P_4-50\right|}}+\frac{\left(P_4-P_5\right)}{\sqrt{\left|P_4-P_5\right|}}=0$$

$$\frac{\left(P_4-50\right)}{\sqrt{\left|P_4-50\right|}}+\frac{\left(P_4-P_5\right)}{\sqrt{\left|P_4-P_5\right|}}=0$$

Ο κώδικας που επιλύει το παραπάνω πρόβλημα σε Mathematica δίνεται παρακάτω.

```
f1=51.9615*(P2-50)/Sqrt[Sqrt[(P2-50)^2]]+
    51.9615*(P2)/Sqrt[Sqrt[(P2)^2]]+130.639*(P2-P5)/Sqrt[Sqrt[(P2-P5)^2]]//N;
f2=(P4-50)/Sqrt[Sqrt[(P4-50)^2]]+
    (P4-P5)/Sqrt[Sqrt[(P4-P5)^2]]//N;
f3=(P5-P2)/Sqrt[Sqrt[(P5-P2)^2]]+
    (P5-P4)/Sqrt[Sqrt[(P5-P4)^2]]//N;
f={f1,f2,f3};
xpar={P2,P4,P5};
spar={s2,s4,s5};
x0={10,20,30};
maxiter=100;
err=1.*10^-6;
J=Table[D[f[[i]],xpar[[j]]],{i,Length[f]},{j,Length[f]}];
k=0;
error=1.;
While[error>err,
 k=k+1;
 If[k>maxiter,Break[]];
 roule=Table[xpar[[i]]->x0[[i]],{i,Length[f]}];
 Jx0=J/.roule//N;
 Fx0=f/.roule;
 s=LinearSolve[Jx0,Fx0]//N;
 x0=x0-s;
 error=Sqrt[Sum[s[[i]]^2.,{i,Length[s]}]]/Length[s]//N;
 Print["--------------------------------"];
 Print["Iteration:",k];

Print["LinearSystem:",MatrixForm[Jx0],"*",MatrixForm[spar],"=",MatrixForm[Fx0
]];
 Print["σ=",MatrixForm[s]];
 Print["x=",MatrixForm[x0]];
 Print["Error=",error];]
```

Παρατηρείται πως για να μην προκύψει διαίρεση με μηδέν στις εξισώσεις του δικτύου θα πρέπει να ισχύει $P_i \neq P_j$ για κάθε ζευγάρι κόμβων i, j που συνδέονται με αγωγό. Σύμφωνα με τα παραπάνω για το δοσμένο δίκτυο θα πρέπει $P_1 \neq P_2$, $P_1 \neq P_4$, $P_2 \neq P_3$, $P_2 \neq P_5$, $P_4 \neq P_5$.

Ο παραπάνω κώδικας με αρχική εκτίμηση $P^{(0)}=(10,20,30)$ συγκλίνει μετά από 13 επαναλήψεις με σφάλμα 6.627×10^{-12}. Παρακάτω δίνονται τα αποτελέσματα των πιέσεων στους κόμβους 2, 3 και 4 σε ενδεικτικές επαναλήψεις.

	Αριθμός επαναλήψεων								
	0	1	2	3	4	5	7	10	13
$P_2\,[Pa]$	10.000	42.525	37.724	38.729	40.101	39.148	40.640	43.247	42.867
$P_4\,[Pa]$	20.000	60.168	33.387	57.329	35.822	55.313	52.696	47.971	47.623
$P_5\,[Pa]$	30.000	38.718	45.475	37.320	44.513	39.681	42.367	45.740	45.245

Έχοντας πλέον υπολογίσει τις πιέσεις του δικτύου οι παροχές μπορούν να υπολογιστούν ως:

$$Q_{ij}=\left(P_i-P_j\right)\sqrt{\frac{1}{C_{ij}\left|P_i-P_j\right|}}=\left(P_i-P_j\right)\sqrt{\frac{D_{ij}^5}{CL_{ij}\left|P_i-P_j\right|}}$$

Οπότε προκύπτει:

$$Q_{12}=138.8\ \ gal/min,\ Q_{23}=340.2\ \ gal/min,\ Q_{14}=Q_{45}=-Q_{25}=201.4\ \ gal/min$$

Παρατηρείται πως ισχύει η εξίσωση συνέχειας στου κόμβους μη γνωστής πίεσης 2, 4, 5. Επίσης, παρατηρείται πώς το μεγαλύτερο κομμάτι της ροής περνάει από τους αγωγούς 1-4, 4-5, 5-2 παρόλο που το συνολικό μήκος σωλήνωσης είναι διπλάσιο από το αντίστοιχο μήκος του αγωγού 1-2. Το παραπάνω δικαιολογείται λόγω της μεγαλύτερης διαμέτρου των αγωγών 1-4, 4-5, 5-2 και λόγω του ότι η παροχή είναι ανάλογη του $D^{2.5}/L^{0.5}$.

<u>Άσκηση 4</u>

Δίνεται το παρακάτω μη γραμμικό σύστημα όπου P μια αυθαίρετη σταθερά:

$$x_6 = \left(\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)x_7$$

$$4 = (2x_3 + 2x_4 + 4x_5)x_7$$

$$1 = (x_1 + x_2 + x_5)x_7$$

$$-28837x_1 - 139009x_2 - 78213x_3 + 18927x_4 + 8427x_5 + \frac{13492}{x_7} - 10690\frac{x_6}{x_7} = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

$$P^2\frac{x_1x_4^3}{x_3x_5} = 1.7837\times10^5$$

$$\frac{x_1x_3}{x_2x_4} = 2.6058$$

Να επιλυθεί το παραπάνω μη γραμμικό σύστημα με την μέθοδο Newton για μια τιμή της αυθαίρετης σταθεράς πίεσης P της επιλογής σας.

Να χρησιμοποιηθεί κριτήριο τερματισμού: $\varepsilon = \frac{1}{N}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right)^2} < 10^{-6}$

Σημειώνεται ότι το σύστημα των 7 εξισώσεων μοντελοποιεί την χημικές αντιδράσεις παραγωγής συνθετικού αερίου καύσης και οι άγνωστοι x_1 έως και x_5 είναι οι συγκεντρώσεις των αερίων CO, CO2, H2O, H2 και CH4 αντίστοιχα, ενώ οι άγνωστοι x_6 και x_7 είναι επίσης συγκεντρώσεις άλλων αερίων στη διαδικασία καύσης.

Απάντηση:

Αρχικά οι παραπάνω εξισώσεις πρέπει να αναδιαταχθούν ώστε να έρθουν στην μορφή $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\right) = 0$. Το ισοδύναμο σύστημα γράφεται ως:

$$\frac{x_6}{x_7} - \frac{1}{2}x_1 - x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0$$

$$x_3 + x_4 + 2x_5 - \frac{2}{x_7} = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_5 - \frac{1}{x_7} = 0$$

$$-28837x_1 - 139009x_2 - 78213x_3 + 18927x_4 + 8427x_5 + \frac{13492}{x_7} - 10690\frac{x_6}{x_7} = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 1 = 0$$

$$P^2x_1x_4^3 - 1.7837\times10^5x_3x_5 = 0$$

$$x_1x_3 - 2.6058x_2x_4 = 0$$

Ο κώδικας που επιλύει το παραπάνω πρόβλημα σε Mathematica δίνεται παρακάτω.

```
P=20.
f={x6/x7-0.5x1-x2-0.5x3,
   x3+x4+2*x5-2/x7,
   x1+x2+x5-1/x7,
   -28837*x1-139009*x2-78213*x3+18927*x4+8427*x5+13492/x7-10690*x6/x7,
   x1+x2+x3+x4+x5-1,
   P^2*x1*x4^3-1.7837*10^5*x3*x5,
   x1*x3-2.6058*x2*x4};
xpar={x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7};
spar={s1,s2,s3,s4,s5,s6,s7};
x0={0.5,0.,0.,0.5,0.,0.5,2.};
MatrixForm[x0]
maxiter=100;
err=1.*10^-6;
J=Table[D[f[[i]],xpar[[j]]],{i,Length[f]},{j,Length[f]}];
k=0;
error=1.;
While[error>err,
 k=k+1;
 If[k>maxiter,Break[]];
 roule=Table[xpar[[i]]->x0[[i]],{i,Length[f]}];
 Jx0=J/.roule//N;
 Fx0=f/.roule;
 s=LinearSolve[Jx0,Fx0]//N;
x0=x0-s;
 error=Sqrt[Sum[s[[i]]^2.,{i,Length[s]}]]/Length[s]//N;
 Print["--------------------------------"];
 Print["Iteration:",k];

Print["LinearSystem:",MatrixForm[Jx0],"*",MatrixForm[spar],"=",MatrixForm[Fx0
]];
 Print["σ=",MatrixForm[s]];
 Print["x=",MatrixForm[x0]];
 Print["Error=",error];]
```

Ο παραπάνω κώδικας για $P = 20$ και αρχική εκτίμηση $x^{(0)} = (0.5, 0, 0, 0.5, 0, 0.5, 2)$ συγκλίνει σε 6 επαναλήψεις με σφάλμα 7.072×10^{-7}. Η τιμή του x σε κάθε επανάληψη δίνεται παρακάτω:

	Αριθμός επαναλήψεων						
	0	1	2	3	4	5	6
x_1	0.500000	0.221017	0.310148	0.320285	0.322838	0.322871	0.322871
x_2	0.000000	0.025928	0.007142	0.009555	0.009225	0.009224	0.009224
x_3	0.000000	0.067562	0.055383	0.046713	0.046031	0.046017	0.046017
x_4	0.500000	0.426328	0.579198	0.612966	0.618095	0.618172	0.618172
x_5	0.000000	0.259165	0.048129	0.010481	0.003811	0.003717	0.003717
x_6	0.500000	0.334325	0.468146	0.553322	0.575824	0.576714	0.576715
x_7	2.000000	1.975560	2.524950	2.880230	2.974140	2.977860	2.977860