Παράδειγμα #1
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΚΙΝΗΤΗΣ ΥΠΟΔΙΑΣΤΟΛΗΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Ν. Βασιλειάδης

Άσκηση 1

1α. Να στρογγυλοποιηθούν οι παρακάτω αριθμοί σε 4 σημαντικά ψηφία:

$$-17.0045, \quad -719.830, \quad 7234148, \quad \frac{3}{17}, \quad -\frac{2}{19}, \quad -\frac{8}{3}$$

Απάντηση: Στρογγυλοποίηση σε 4 σημαντικά ψηφία:

x	**x***
-17.0045	-17.00
-719.830	-719.8
7234148	7234000
3/17	0.1765
-2/19	-0.1053
-8/3	-2.667

1β. Να στρογγυλοποιηθούν οι παρακάτω αριθμοί σε 3 σημαντικά ψηφία και σε 3 δεκαδικά ψηφία:

$$-93917.0045, \quad 0.08330, \quad -0.08765, \quad 0.067351, \quad -0.8375005$$

Απάντηση: Στρογγυλοποίηση σε 3 σημαντικά ψηφία και 3 δεκαδικά ψηφία

x	**x* (3 σημαντικά)**	**x* (3 δεκαδικά)**
-93917.0045	-93900	-93917.005
0.08330	0.0833	0.083
-0.08765	-0.0877	-0.088
0.067351	0.0674	0.067
-0.8375005	-0.838	-0.838

1γ. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{1+x^3}$. Να βρεθεί το ολικό σφάλμα στο σημείο x=0.12307 χρησιμοποιώντας ακρίβεια το πολύ 3 σημαντικά ψηφία.

Απάντηση:

Η τιμή της συνάρτησης $f(x)$ στο ακριβές x=0.12307 είναι:

$$f(0.12307)=\frac{0.12307}{1+0.12307^3}=\frac{0.12307}{1.0019}=0.12284$$

Με χρήση 3 σημαντικών ψηφίων το σημείο υπολογισμού γίνεται x*=0.123. Η τιμή της συνάρτησης $f^*\left(x^*\right)$ χρησιμοποιώντας ακρίβεια 3 σημαντικά ψηφία υπολογίζεται ως:

$$f^*\left(0.123\right)=\frac{0.123}{1+0.123^3}=\frac{0.123}{1.00}=0.123$$

Το ολικό σφάλμα υπολογίζεται ως: $\varepsilon=\left|f^*\left(x^*\right)-f\left(x\right)\right|=0.00016$

Άσκηση 2

Πως ορίζεται και τι σημαίνει ο όρος flop στους επιστημονικούς υπολογισμούς. Βρείτε τον χρόνο που απαιτείται στον υπολογιστή σας για να εκτελέσετε 1Kflop, 1Mflop, 1Gflop, 1Tflop.

Απάντηση:

Ο όρος flop σημαίνει floating point operation (πράξη μεταξύ αριθμών κινητής υποδιαστολής) και ορίζεται ως ο χρόνος που χρειάζεται ένας υπολογιστής για να υπολογίσει έναν πολλαπλασιασμό και μία πρόσθεση μαζί, δηλαδή y←a+x*y, συν τον χρόνο που απαιτείται για την ανάκτηση από την μνήμη RAM των δεδομένων που εμπλέκονται στις δύο αυτές πράξεις. Οι ποσότητες a και x είναι σταθερές και γνωστές όπως επίσης γνωστή και η αρχική τιμή της ποσότητας y. Το flop αποτελεί μονάδα μέτρησης της ταχύτητας του επεξεργαστή και σημείο αναφοράς όταν συγκρίνεται η ταχύτητα υπολογισμών ανάμεσα σε Η/Υ.

Πρόγραμμα υπολογισμού χρόνου εκτέλεσης n flops:

```
Program Flop
implicit none
real*8::a,x,y,ts,tf
integer*8::i,n
print*,'Give max number of flops'
read*,n

a=1.
x=1.
y=0.
i=1

Call Cpu_time(ts)
do i=1,n
y=a+x*y
enddo
Call Cpu_time(tf)
```

```
print*, 'the time needed for the evaluation of',n,' flops is'
print*, tf-ts,'sec'
end
```

Ο παραπάνω κώδικας δίνει τους εξής χρόνους με ακρίβεια 5 σημαντικών ψηφίων:

Αριθμός flops	**Χρόνος (sec)**
1 Kflop=1024 flops	0.0000
1 Mflop=1024^2 flops	0.0000
1 Gflop=1024^3 flops	8.8281
1 Tflop=1024^4 flops	$8736.6 \approx 8.8281 \times 1024$

Άσκηση 3

Να υπολογισθούν οι ρίζες της αλγεβρικής εξίσωσης $x^2 + 3000.001x + 3 = 0$. Οι υπολογισμοί να γίνουν α) σε υποθετικό υπολογιστή πέντε σημαντικών ψηφίων και β) στον υπολογιστή σας για απλή και διπλή ακρίβεια.

Οι σωστές ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1 = -0.001$ και $x_2 = -3000$.

Εάν το σχετικό σφάλμα είναι μεγαλύτερο του 1%, εφαρμόστε τον εναλλακτικό τύπο: $x_{1,2} = \dfrac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$

Αφού αποδείξτε τον εναλλακτικό τύπο, εξετάστε το σχετικό σφάλμα των αποτελεσμάτων και εξηγήστε γιατί τα αποτελέσματα βελτιώνονται σημαντικά.

Απάντηση:

Απόδειξη του εναλλακτικού τύπου:

$$x_1 = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{-2c\left(b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{\left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\left(b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)} = \frac{2c\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{b^2 - b^2 + 4ac} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{-2c\left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{\left(b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)} = \frac{2c\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{b^2 - b^2 + 4ac} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3α. Σε υποθετικό υπολογιστή 5 σημαντικών ψηφίων χρησιμοποιώντας τον τύπο έχουμε:

$a = 1.0000,\ b = 3000.0,\ c = 3.0000,\ b^2 = 9000000$

$4ac = 12.000,\ \ b^2 - 4ac = 9000000,\ \ \sqrt{b^2 - 4ac} = 3000.0$

Με τον τύπο $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ υπολογίζουμε τις δύο ρίζες και τα σχετικά σφάλματα:

$$x_1 = \frac{-3000.0 + 3000.0}{2.0000} = 0\,, \quad \varepsilon_1 = \left|\frac{0 - (-0.001)}{-0.001}\right| = 1*100\% = 100\%$$

$$x_2 = \frac{-3000.0 - 3000.0}{2.0000} = -3000.0\,, \quad \varepsilon_2 = \left|\frac{-3000 - (-3000)}{-3000}\right| = 0*100\% = 0\%$$

Αντίστοιχα για $x_{1,2} = \dfrac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$ υπολογίζουμε τις δύο ρίζες και τα σχετικά σφάλματα:

$$x_1 = \frac{-6.0000}{3000.0 + 3000.0} = -0.0010000\,, \quad \varepsilon_1 = \left|\frac{-0.001 - (-0.001)}{-0.001}\right| = 0*100\% = 0\%$$

$$x_2 = \frac{-6.0000}{3000.0 - 3000.0} = \frac{-6.0000}{0} \text{ (δεν υπολογίζεται)}, \quad \varepsilon_2 : \text{δεν υπολογίζεται}$$

Με τον κλασσικό τύπο το σχετικό σφάλμα της τιμής της $2^{ης}$ ρίζας είναι αντίστοιχο με την ακρίβεια του Υ/Η, ενώ αντίθετα το σχετικό σφάλμα της $1^{ης}$ ρίζας είναι αρκετά μεγαλύτερο.
Με την χρήση του εναλλακτικού τύπου το η ακρίβεια υπολογισμού της $1^{ης}$ ρίζας βελτιώνεται σημαντικά ενώ η τιμή της $2^{ης}$ ρίζα αλλοιώνεται τελείως.

3β. Ο υπολογισμός των ριζών σε πραγματικό υπολογιστή γίνεται με το παρακάτω πρόγραμμα:

```
program rizes

!Apli akribeia
!real*4:: a,b,c,D,x1,x2,e1,e2,x1anal,x2anal

!Dipli akribeia
real*8:: a,b,c,D,x1,x2,e1,e2,x1anal,x2anal

   x1anal=-0.001
   x2anal=-3000

   a=1
   b=3000.001
   c=3
```

```
   D=b*b-4*a*c

   !Klassikos tipos
   !x1=(-b+sqrt(D))/(2*a)
   !x2=(-b-sqrt(D))/(2*a)

   !Enallaktikos tipos
   x1=-(2*c)/(b+sqrt(D))
   x2=-(2*c)/(b-Sqrt(D))

   e1=abs((x1-x1anal)/x1anal)*100
   e2=abs((x2-x2anal)/x2anal)*100

   print*, x1,e1
   print*, x2,e2

end program rizes
```

Ο παραπάνω κώδικας μπορεί να δώσει τις ρίζες της εξίσωσης με βάση τον κλασσικό ή τον εναλλακτικό τύπο για μονή και διπλή ακρίβεια. Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον πίνακα:

	Τύπος: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Τύπος: $x_{1,2} = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$
Real*4 (Απλή ακρίβεια)	x1=-0.00098828133 e1=1.171872% x2= -3000.000 e2= 0%	x1=-0.0010000000 e1= 0% x2= -3035.573 e2= 1.185758%
Real** (Διπλή ακρίβεια)	x1=-0.00100000000770706 e1=0.000003979039131262% x2= -2999.99997656249 e2= 0.00000078125024932%	x1=-0.00100000000781250 e1=0.00000396849468017% x2= -2999.99997687883 e2=0.00000077070581028%

Συμπερασματικά, λοιπόν, παρατηρείται ότι ο εναλλακτικός τύπος βελτιώνει σημαντικά το σχετικό σφάλμα στη 1η ρίζα. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού παρακάμπτεται η ανάγκη υπολογισμού της ποσότητας $-b + \sqrt{b^2 - 4ac}$. Αντίθετα, όταν ο εναλλακτικός τύπος εφαρμόζεται στον υπολογισμό της 2ης ρίζας η ποσότητα αυτή ξαναεμφανίζεται και μάλιστα στον παρονομαστή με συνέπεια το σχετικό σφάλμα των υπολογισμών να είναι υποδεέστερο της ακρίβειας του Η/Υ.

Επομένως εφαρμόζεται για τον υπολογισμό της 2ης ρίζας ο κλασσικός τύπος και για τον υπολογισμό της 1ης ρίζας ο εναλλακτικός τύπος.

Άσκηση 4

Οι ρίζες της εξίσωσης $x^2+62.10x+1=0$ είναι $x_1=-0.01610723$ και $x_2=-62.08390$. Στην παραπάνω εξίσωση $b^2 \gg 4ac$ και ο υπολογισμός του x_1 προϋποθέτει την αφαίρεση ανάμεσα σε περίπου ίσους αριθμούς. Έστω ότι οι υπολογισμοί γίνονται σε Η/Υ που αποθηκεύονται 4 σημαντικά ψηφία. Να βρεθούν τα x_1 και x_2 και να υπολογισθεί το σχετικό σφάλμα. Στην συνέχεια να υπολογισθούν πιο ακριβή αποτελέσματα εφαρμόζοντας τον αναγωγικό τύπο

$$x_1=\frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{2a\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}.$$

Απάντηση:

Οι ρίζες του πολυωνύμου με βάση τον κλασσικό τύπο υπολογίζονται ως:

$$x_1^*=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-62.10+\sqrt{62.10^2-4}}{2}=\frac{-62.10+62.06}{2}=-0.02$$

$$x_2^*=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-62.10-\sqrt{62.10^2-4}}{2}=\frac{-62.10-62.06}{2}=-62.08$$

Τα αντίστοιχα σχετικά σφάλματα με βάση τις ακριβείς ρίζες είναι:

$$\varepsilon_1=\left|\frac{x_1-x_1^*}{x_1}\right|=\left|\frac{-0.01610723-\left(-0.02\right)}{-0.01610723}\right|=24.17\times10^{-2}=24.17\%$$

$$\varepsilon_2=\left|\frac{x_2-x_2^*}{x_2}\right|=\left|\frac{-62.08390-\left(-62.08\right)}{-62.08390}\right|=6.28\times10^{-5}=0.00628\%$$

Χρησιμοποιώντας τον εναλλακτικό τύπο για την εύρεση του x_1^* έχουμε:

$$x_1^*=\frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{2a\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}=\frac{2c}{\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}=\frac{2}{-62.10-\sqrt{62.10^2-4}}=\frac{2}{-62.10-62.06}=-0.01611$$

Το σχετικό σφάλμα είναι:

$$\varepsilon_1=\left|\frac{x_1-x_1^*}{x_1}\right|=\left|\frac{-0.01610723-\left(-0.01611\right)}{-0.01610723}\right|=1.72\times10^{-4}=0.0172\%$$

Φαίνεται ότι ο εναλλακτικός τύπος μειώνει σημαντικά το σχετικό σφάλμα της πρώτης ρίζας καθώς παρακάμπτει την αφαίρεση μεταξύ περίπου ίσων αριθμών.