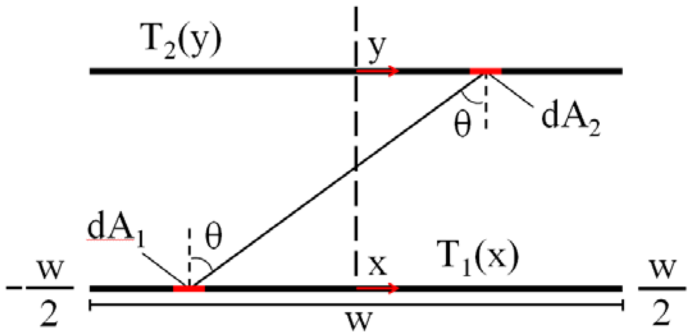
ΚΩΔΙΚΑΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΜΕ ΜΗ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ

Επιμέλεια: Νίκος Βασιλειάδης (υποψήφιος διδάκτωρ, Φεβρουάριος 2019)

Δύο παράλληλες πλάκες απείρου μήκους και πλάτους w βρίσκονται σε απόσταση d. Οι πλάκες είναι τέλεια μονωμένες εξωτερικά. Η πλάκα 1 θερμαίνεται ομοιόμορφα με ηλεκτρική αντίσταση με ειδική θερμορροή q_1, ενώ η πλάκα 2 δεν θερμαίνεται ($q_2 = 0$). Ο περιβάλλων χώρος είναι σε θερμοκρασία απόλυτου μηδέν. Να βρεθούν οι ολοκληρωτικές εξισώσεις για τον υπολογισμό των θερμοκρασιών T_1 και T_2 που μεταβάλλονται κατά μήκος των πλακών για όταν οι πλάκες είναι α) μέλανες επιφάνειες και β) διαχυτικές και γκρίζες.



Οι συντελεστές όψεως ανάμεσα σε δύο απείρου μήκους λωρίδες dA_1 και dA_2 είναι:

$$dF_{d1-d2} = \frac{1}{2} d\left(\sin\theta\right) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{\left[\left(y-x\right)^2 + d^2\right]^{3/2}} dy \qquad dF_{d2-d1} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{\left[\left(y-x\right)^2 + d^2\right]^{3/2}} dx$$

α) **μέλανες** επιφάνειες, ισοζύγιο θερμότητας στη πλάκα 1:

$$q_1 = J_1(x) - G_1(x) = \sigma T_1(x)^4 - \int_{-w/2}^{w/2} \sigma T_2(y)^4 \, dF_{d1-d2} = \sigma T_1(x)^4 - \int_{-w/2}^{w/2} \sigma T_2(y)^4 \frac{1}{2}\frac{d^2}{\left[\left(y-x\right)^2 + d^2\right]^{3/2}} dy$$

Εισάγουμε τις αδιάστατες ποσότητες: $X = x/d$, $Y = w/d$, $L = w/d$, $\Theta_i = \sigma T_i^4 / q_1$, $i = 1,2$

$$1 = \Theta_1(X) - \int_{-1/2}^{1/2} \Theta_2(X) \frac{1}{2}\frac{dY}{\left[\left(Y-X\right)^2 + 1\right]^{3/2}} \Rightarrow \Theta_1(X) = 1 + \int_{-1/2}^{1/2} \Theta_2(Y) \frac{1}{2}\frac{dY}{\left[\left(Y-X\right)^2 + 1\right]^{3/2}}$$

Αντίστοιχα στη πλάκα 2:

$$q_2 = J_2(y) - G_2(y) = \sigma T_2(y)^4 - \int_{-w/2}^{w/2} \sigma T_1(x)^4 \, dF_{d2-d1} = \sigma T_2(y)^4 - \int_{-w/2}^{w/2} \sigma T_1(x)^4 \frac{1}{2}\frac{d^2}{\left[\left(y-x\right)^2 + d^2\right]^{3/2}} dx = 0$$

$$q_2 = 0 = \Theta_2(Y) - \int_{-L/2}^{L/2} \Theta_1(Y) \frac{1}{2}\frac{dX}{\left[\left(Y-X\right)^2 + 1\right]^{3/2}} \Rightarrow \Theta_2(Y) = \int_{-L/2}^{L/2} \Theta_1(X) \frac{1}{2}\frac{dX}{\left[\left(Y-X\right)^2 + 1\right]^{3/2}}$$

β) **διαχυτικές και γκρίζες**: ισοζύγια θερμότητας

$$q_1 = \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}\left(\sigma T_1^4 - J_1\right) \quad \Rightarrow \quad J_1 = \sigma T_1^4 - \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} q_1$$

$$q_2 = 0 = \frac{\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2}\left(\sigma T_2^4 - J_2\right) \Rightarrow \quad J_2(y) = \sigma T_2(y)^4$$

$$q_1 = J_1 - \int_{-w/2}^{w/2} J_2(y)\, dF_{d1-d2} = \sigma T_1^4 - \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} q_1 - \int_{-w/2}^{w/2} \sigma T_2(y)^4 \frac{1}{2}\frac{d^2}{\left[(y-x)^2 + d^2\right]^{3/2}} dy$$

$$\frac{q_1}{\varepsilon_1} = \sigma T_1^4 - \int_{-w/2}^{w/2} \sigma T_2(y)^4 \frac{1}{2}\frac{d^2}{\left[(y-x)^2 + d^2\right]^{3/2}} dy$$

$$\frac{q_2}{\varepsilon_2} = 0 = \sigma T_2^4 - \int_{-w/2}^{w/2} \sigma T_1(x)^4 \frac{1}{2}\frac{d^2}{\left[(y-x)^2 + d^2\right]^{3/2}} dx$$

Εισάγουμε τις αδιάστατες ποσότητες:

$$\frac{1}{\varepsilon_1} = \Theta_1(X) - \int_{-1/2}^{1/2} \Theta_2(Y) \frac{1}{2}\frac{dY}{\left[(Y-X)^2+1\right]^{3/2}} \Rightarrow \boxed{\Theta_1(X) = \frac{1}{\varepsilon_1} + \int_{-1/2}^{1/2} \Theta_2(Y) \frac{1}{2}\frac{dY}{\left[(Y-X)^2+1\right]^{3/2}}}$$

$$0 = \Theta_2(Y) - \int_{-L/2}^{L/2} \Theta_1(X) \frac{1}{2}\frac{dX}{\left[(Y-X)^2+1\right]^{3/2}} \Rightarrow \boxed{\Theta_2(Y) = \int_{-L/2}^{L/2} \Theta_1(X) \frac{1}{2}\frac{dX}{\left[(Y-X)^2+1\right]^{3/2}}}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι ακριβώς ίδιο όπως και στη περίπτωση της μελανής επιφάνειας και επομένως το $\Theta_{2,gray}(Y) = \Theta_{2,black}(Y)$.

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα αυτό στη εξίσωση για το $\Theta_1(X)$ και χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα για $\Theta_{1,black}(X)$ έχουμε:

$$\Theta_1(X) = \frac{1}{\varepsilon_1} + \int_{-1/2}^{1/2} \Theta_{2,black}(Y) \frac{1}{2}\frac{dY}{\left[(Y-X)^2+1\right]^{3/2}} = \frac{1}{\varepsilon_1} + \left[\Theta_{1,black}(X) - 1\right] \Rightarrow \boxed{\Theta_{1,gray} = \Theta_{1,black} + \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1}}$$

Αναπτύσσεται πρόγραμμα σε Fortran το οποίο επιλύει το σύστημα των δύο ολοκληρωτικών εξισώσεων που προέκυψε από την μεταφορά θερμότητας μέσω ακτινοβολίας δύο παράλληλων πλακών απείρου βάθους. Ο χρήστης επιλέγει τον αριθμό των σημείων στα οποία επιθυμεί να χωρίσει την κάθε πλάκα ορίζοντας την τιμή της μεταβλητής n (n=22=2x11 by default). Επίσης ο χρήστης έχει την δυνατότητα να ορίσει το ποσό θερμότητας Q1 που δίδεται στην πλάκα 1, και την αδιάστατη ποσότητα L.

```
Program IntegralEquations
Implicit none
doubleprecision,allocatable::X(:),A(:,:)
integer,allocatable::TX(:)
real::t,pivot,s,sb,L,dl,x1,y1,Q1
Integer::i,j,k,n=22
Allocate(TX(n),X(n),A(n,n+1))

sb=5.670d-8
Q1=500
L=1
dl=L/(n/2.-1)

Do i=1,n
    Do j=1,n
          If (i<=n/2) then
                A(i,n+1)=1
                If (j<=n/2) then
                      If (i==j) then
                            A(i,j)=1
                      Else
                            A(i,j)=0
                      Endif
                Else
                      x1=-L/2.+(i-1)*dl
                      y1=-L/2.+(j-(n/2+1))*dl
                      If (j==n/2+1 .or. j==n) then
                            A(i,j)=-dl/4/((y1-x1)**2+1)**1.5
                      Else
                            A(i,j)=-dl/2/((y1-x1)**2+1)**1.5
                      Endif
                Endif

          Else

                A(i,n+1)=0
                If (j>n/2) then
                      If (i==j) then
                            A(i,j)=1
                      Else
                            A(i,j)=0
                      Endif
                Else
                      x1=-L/2.+(j-1)*dl
                      y1=-L/2.+(i-(n/2+1))*dl
                      If (j==n/2 .or. j==1) then
                            A(i,j)=-dl/4/((x1-y1)**2+1)**1.5
                      Else
                            A(i,j)=-dl/2/((x1-y1)**2+1)**1.5
                      Endif
                Endif
          Endif
    Enddo
Enddo

Do i=1,n
    TX(i)=i
Enddo

k=1
Do while (k<=n)
    pivot =find_pivot(3,k)
    If (pivot==0) then
          Print*,'Pivot = 0. Gauss elimination can not continue'
          Stop
```

```
    Endif
    Do j=k,n+1
          A(k,j)=A(k,j)/pivot
    Enddo

    Do i=k+1,n
          t=a(i,k)
          Do j=k,n+1
                A(i,j)=A(i,j)-A(k,j)*t
          Enddo
    Enddo

    k=k+1
Enddo

x(n)=a(n,n+1)
Do i=n-1,1,-1
    s=0
    Do j=i+1,n
          s=s+a(i,j)*x(j)
    Enddo
    x(i)=a(i,n+1)-s
Enddo

Do i=1,n
    X(i)=(X(i)*Q1/sb)**0.25
Enddo

Write (*,'("------------------------SOLUTION----------------------
---")')
Write(*,'(/)')
Do i=1,n
    Write(*,'("The Temeperature
T","(",(I3),")",2x,"=",2x,(F8.2),2x,"Kelvin")') TX(i),X(i)
    Write(*,'(/)')
Enddo

Contains

Real function find_pivot(s,k)
    Integer,intent(IN)::s,k
    Integer::i,maxi,maxj,t
    Real::max,temp

    If (s==1) then
            max=a(k,k)
    Elseif (s==2) then
          max=a(k,k)
          maxi=k
          Do i=k,n
                If (abs(a(i,k))>abs(max)) then
                      max=a(i,k)
                      maxi=i
                Endif
          Enddo

          If (maxi/=k) then
                Do j=1,n+1
                      temp=a(k,j)
                      a(k,j)=a(maxi,j)
                      a(maxi,j)=temp
                Enddo
          Endif

    Elseif (s==3) then
```

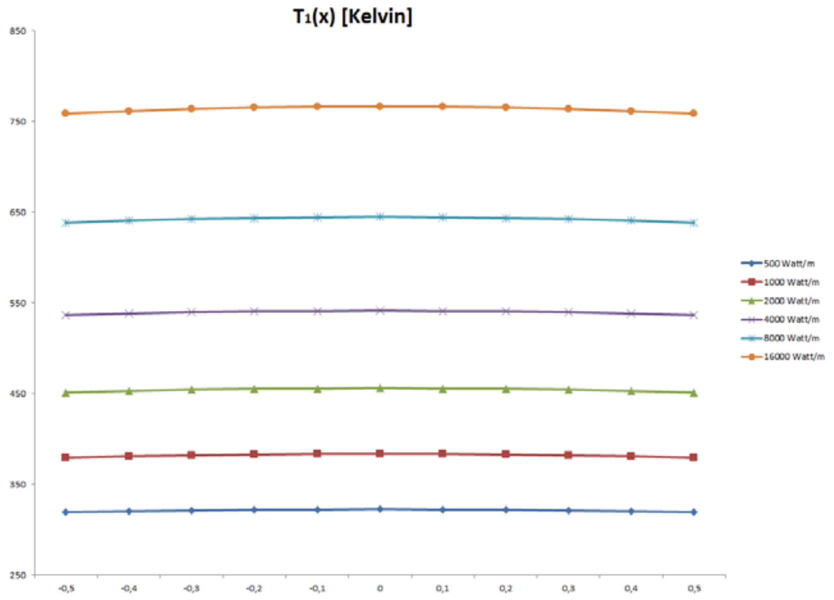
```
        max=a(k,k)
        maxi=k
        maxj=k
        Do i=k,n
            Do j=k,n
                If (abs(a(i,j))>abs(max)) then
                    max=a(i,j)
                    maxi=i
                    maxj=j
                Endif
            Enddo
        Enddo

        If (maxi/=k) then
            Do j=1,n+1
                temp=a(k,j)
                a(k,j)=a(maxi,j)
                a(maxi,j)=temp
            Enddo
        Endif

        If (maxj/=k) then
            Do i=1,n
                temp=a(i,k)
                a(i,k)=a(i,maxj)
                a(i,maxj)=temp
            Enddo
            t=TX(k)
            TX(k)=TX(maxj)
            TX(maxj)=t
        Endif
    Endif

    find_pivot=max

End function find_pivot

End program
```

Οι θερμοκρασίες σε Kelvin που δίνει το πρόγραμμα για L=1, Q1=500 Watt/m και n=11 σημεία σε πινακοποιημένη μορφή είναι:

(x,y)	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$T_1(x)$	319.1	320.2	321.1	321.7	322.2	322.3	322.2	321.7	321.1	320.2	319.1
$T_2(y)$	247.6	252.8	257.1	260.2	262.1	262.6	262.1	260.2	257.1	252.8	247.6

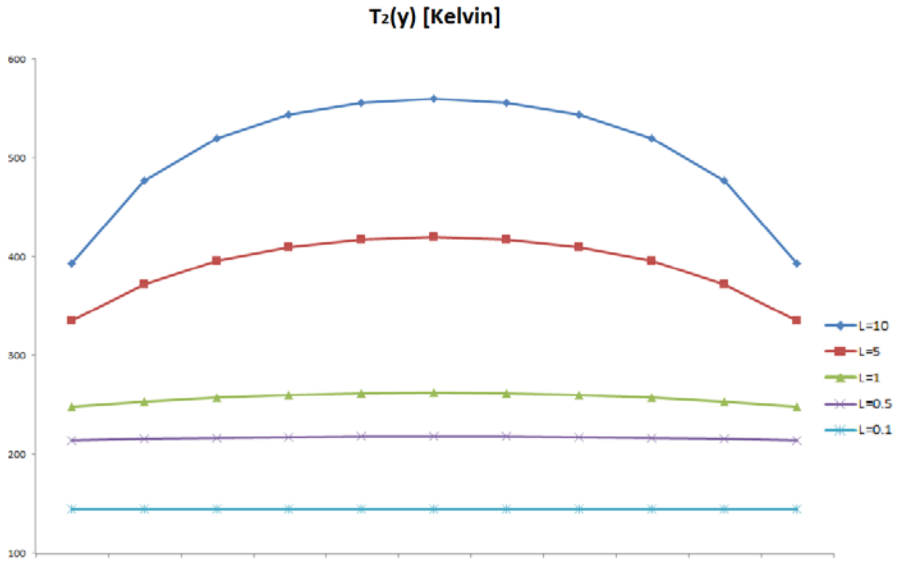
Από τα παραπάνω παρατηρείται ότι υπό τις ίδιες συνθήκες οι θερμοκρασίες T2(y) της δεύτερης επιφάνειας έχουν μικρότερες τιμές και μεγαλύτερη διακύμανση σε σχέση με την πρώτη επιφάνεια.

Στην συνέχεια εξετάζεται η επίδραση του Q1 στην T1(x) για L=w/d σταθερό και ίσο με την μονάδα.



Η θερμοκρασία της πλάκας 1 είναι σχεδόν σταθερή και θα μπορούσε να προσεγγιστεί σαν επιφάνεια σταθερής θερμοκρασίας σε μια λιγότερο λεπτομερή ανάλυση. Όσο αυξάνει η θερμότητα που προσδίδουμε στην επιφάνεια τόσο αυξάνει και η θερμοκρασία της το οποίο επαληθεύεται και από το παραπάνω διάγραμμα. Επίσης με την αύξηση του ποσού θερμότητας που προσδίδεται στην επιφάνεια 1 παρατηρείται μια μικρή καμπύλωση στην κατανομή της θερμοκρασίας.

Τέλος, κρατώντας το Q1 σταθερό και ίσο με 500 Watt/m εξετάζεται η επίδραση του λόγου του μήκους των επιφανειών προς την μεταξύ τους απόσταση που εκφράζεται μέσω της αδιάστατης ποσότητας L=w/d. Για την πληρέστερη κατανόηση της συμπεριφοράς του διαγράμματος μπορούμε να φανταστούμε πως κρατάμε το μήκος w των πλακών σταθερό. Οπότε αύξηση ή μείωση της παραμέτρου L σημαίνει ότι πλησιάζουμε ή απομακρύνουμε τις δύο πλάκες αντίστοιχα.



Παρατηρείται ότι για L=0.1 η κατανομή της T2(y) είναι σχεδόν σταθερή, ενώ καθώς αυξάνει η παράμετρος L η κατανομή αρχίζει να καμπυλώνει και να παίρνει παραβολική μορφή. Επίσης φαίνεται ότι όσο αυξάνει το L και πλησιάζουν οι πλάκες αυξάνουν, και οι τιμές της θερμοκρασίας T2(y) της δεύτερης επιφάνειας.