

Κεφάλαιο 2: Μετάδοση θερμότητας με ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ

2.1 Συντελεστής όψεως

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε κυρίως τις ιδιότητες ακτινοβολίας που εκπέμπεται, απορροφάται και αντανακλάται από μία επιφάνεια. Τώρα εξετάζουμε την ανταλλαγή ακτινοβολίας ανάμεσα σε δύο ή περισσότερες επιφάνειες. Εξαρτάται από τις ιδιότητες και την θερμοκρασία των επιφανειών αλλά και από την γεωμετρία τους όπως και από τον μεταξύ τους προσανατολισμό.

Εξετάζονται περιπτώσεις όπου το μέσο που βρίσκεται ανάμεσα στις επιφάνειες δεν εκπέμπει, απορροφά ή σκεδάζει την ακτινοβολία (nonparticipating medium) και επομένως δεν επιδρά στην μεταφορά ακτινοβολίας μεταξύ των επιφανειών. Οι συνθήκες αυτές ισχύουν απόλυτα όταν υπάρχει κενό και προσεγγιστικά στην περίπτωση των περισσότερων αερίων.

Στο πλαίσιο αυτό είναι απαραίτητο να προσδιορίσουμε γεωμετρικά χαρακτηριστικά στη μελέτη ανταλλαγής ακτινοβολίας ανάμεσα σε επιφάνειες εισάγοντας τον ορισμό του συντελεστή όψεως (view factor, configuration factor, form factor or shape factor).

Συντελεστής όψεως $F_{1 \rightarrow 2}$ ή για λόγους συντομίας απλώς με F_{1-2} είναι ο λόγος της ακτινοβολίας που απομακρύνεται από την επιφάνεια 1 και προσπίπτει στην επιφάνεια 2 προς την συνολική ακτινοβολία που απομακρύνεται από την επιφάνεια 1.

Αντίστοιχα, $F_{2 \rightarrow 1}$ ή F_{2-1} είναι το κλάσμα της ακτινοβολίας που απομακρύνεται από την επιφάνεια 2 και προσπίπτει στην επιφάνεια 1.

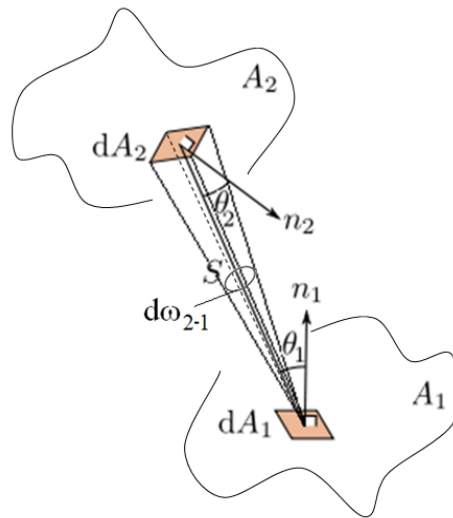
Πρόκειται για καθαρά γεωμετρική ποσότητα που δεν εξαρτάται από τη θερμοκρασία ή τις ιδιότητες των επιφανειών.

Έστω δύο επιφάνειες A_1 και A_2 οι οποίες είναι προσανατολισμένες τυχαία η μία προς την άλλη όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1.1. Σε κάθε επιφάνεια ορίζεται η στοιχειώδης η διαφορική επιφάνεια dA_1 και dA_2 οι οποίες απέχουν μεταξύ τους απόσταση μήκους S . Οι γωνίες θ_1 και θ_2 ορίζονται ως οι γωνίες που σχηματίζονται ανάμεσα στην ευθεία που συνδέει τις διαφορικές επιφάνειες και τα μοναδιαία διανύσματα \mathbf{n}_1 και \mathbf{n}_2 που είναι κάθετα στις επιφάνειες dA_1 και dA_2 .

Από τον ορισμό της έντασης της ακτινοβολίας προκύπτει ότι η ισχύς ακτινοβολίας που απομακρύνεται από την dA_1 και προσπίπτει στην dA_2 είναι

$$dq|_{dA_1 \rightarrow dA_2} = I_{e+r,1} \cos \theta_1 dA_1 d\omega_{2-1}, \quad \text{όπου} \quad d\omega_{2-1} = \frac{\cos \theta_2 dA_2}{S^2} \quad \Rightarrow$$

$$dq|_{dA_1 \rightarrow dA_2} = I_{e+r,1} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{S^2} dA_1 dA_2$$



Σχήμα 2.1.1: Ανταλλαγή ακτινοβολίας ανάμεσα στις επιφάνειες A_1 και A_2 .

Υποθέτοντας ότι η επιφάνεια 1 εκπέμπει και αντανακλά διαχυτικά τότε προκύπτει ότι

$$dq|_{dA_1 \rightarrow dA_2} = J_1 \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi S^2} dA_1 dA_2 \quad (*) \quad \text{όπου} \quad I_{e+r,1} = J_1 / \pi$$

Σημειώνεται ότι η **ολική ακτινοβόλος ισχύς** J (radiosity) δίδεται από το ολοκλήρωμα

$$J = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{\lambda\theta,e+r}(\lambda, \theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi d\lambda$$

Εάν η επιφάνεια εκπέμπει και αντανακλά διαχυτικά τότε $I_{\lambda\theta,e+r}(\lambda, \theta, \varphi) = I_{\lambda,e+r}(\lambda)$

και $J_{\lambda}(\lambda) = \pi I_{\lambda,e+r}(\lambda)$ ή $J = \pi I_{e+r}$

Τονίζεται ότι το J (όπως και το E) σχετίζεται με τη πραγματική επιφάνεια ενώ το I με την επιφάνεια προβολής.

Με βάση τον ορισμό του συντελεστή όψεως προκύπτει ότι

$$dF_{dA_1 \rightarrow dA_2} = \frac{dq|_{dA_1 \rightarrow dA_2}}{J_1 dA_1} = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi S^2} dA_2 = \frac{\cos \theta_1}{\pi} d\omega_1$$

Φαίνεται λοιπόν ότι ο διαφορικός συντελεστής όψεως εξαρτάται μόνο από το μέγεθος της επιφάνειας dA_2 και τον προσανατολισμό της σε σχέση με την επιφάνεια dA_1 .

Εύκολα αποδεικνύεται ότι $dF_{dA_2 \rightarrow dA_1} = \frac{dq|_{dA_2 \rightarrow dA_1}}{J_2 dA_2} = \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_1}{\pi S^2} dA_1$ και επομένως

$$F_{dA_1 \rightarrow dA_2} dA_1 = F_{dA_2 \rightarrow dA_1} dA_2 \quad (**)$$

Ολοκληρώνοντας ως προς την επιφάνεια A_2 για να βρούμε τη ενέργεια που φθάνει σε όλη την επιφάνεια A_2 και διαιρώντας με την ολική ενέργεια που φεύγει από την dA_1 έχουμε

$$F_{dA_1 \rightarrow A_2} = \frac{\int_{A_2} dq_{dA_1 \rightarrow dA_2}}{J_1 dA_1} = \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi S^2} dA_2 = \int_{A_2} dF_{dA_1 \rightarrow dA_2}$$

όπου τα όρια της ολοκλήρωσης προς την επιφάνεια A_2 εκτείνονται μόνο στο τμήμα που φαίνεται από την dA_1 . Επίσης από τον κανόνα της αμοιβαιότητας

$$F_{2 \rightarrow d1} = \frac{dA_1}{A_2} \int_{A_2} dF_{dA_1 \rightarrow dA_2}$$

Η ισχύς ακτινοβολίας που απομακρύνεται από όλη την επιφάνεια 1 και προσπίπτει σε όλη την επιφάνεια 2 προκύπτει ολοκληρώνοντας τη σχέση (*) ως προς τις επιφάνειες, δηλαδή

$$q|_{1 \rightarrow 2} = J_1 \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi S^2} dA_1 dA_2$$

και με βάση τον ορισμό του συντελεστή όψεως προκύπτει ότι

$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{J_1 \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi S^2} dA_1 dA_2}{J_1 A_1} \Rightarrow$$

$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi S^2} dA_1 dA_2 = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} F_{d1 \rightarrow 2} dA_1$$

$$\text{Ομοίως } F_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{A_2} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi S^2} dA_1 dA_2 \quad (***) \text{ και } A_1 F_{1 \rightarrow 2} = A_2 F_{2 \rightarrow 1} \quad (**)$$

Οι σχέσεις (**) για τις επιφάνειες A_1 και A_2 , όπως και τις στοιχειώδεις επιφάνειες dA_1 και dA_2 είναι γνωστές ως ο **κανόνας της αμοιβαιότητας** (reciprocity rule).

Ένας άλλος σημαντικός κανόνας στη περίπτωση κλειστών κοιλότητων που αποτελούνται από $i = 1, 2, \dots, N$ επιφάνειες είναι ο **κανόνας του αθροίσματος** (summation rule) που ισχύει για κάθε μία από τις επιφάνειες της κοιλότητας:

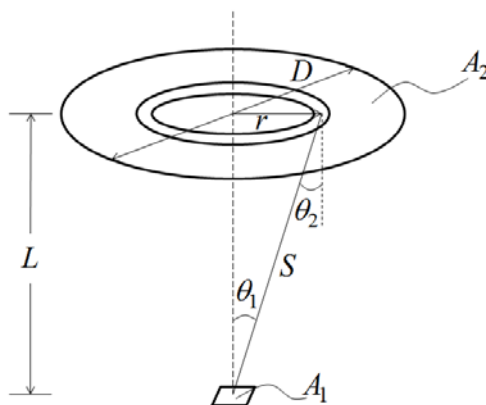
$$\sum_{j=1}^N F_{i \rightarrow j} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Άρα σε μία κοιλότητα με $i = 1, 2, \dots, N$ επιφάνειες ορίζονται N^2 άγνωστοι συντελεστές όψεως και απαιτείται αντίστοιχος αριθμός εξισώσεων. Λαμβάνοντας υπόψη τους κανόνες της αμοιβαιότητας και του αθροίσματος ο αριθμός των αγνώστων συντελεστών όψεως μειώνεται σημαντικά. Συγκεκριμένα, από τον κανόνα της αμοιβαιότητας ορίζονται $N(N-1)/2$ εξισώσεις και N εξισώσεις από τον κανόνα του αθροίσματος. Επομένως ο αριθμός των εξισώσεων που πρέπει να αγνώστων συντελεστών μειώνεται σε

$$N^2 - N(N-1)/2 - N = N^2/2 - N/2 = N(N-1)/2$$

Σε επίπεδες και **κυρτές** (convex) επιφάνειες $F_{i \rightarrow i} = 0$ το οποίο βέβαια δεν ισχύει για **κοίλες** (concave) επιφάνειες όπου $F_{i \rightarrow i} > 0$.

Παράδειγμα 2.1.1: Υπολογισμός συντελεστή όψεως ανάμεσα στις παράλληλες επιφάνειες A_1 και A_2 (βλέπε Σχήμα 2.1.2) με $A_1 \ll A_2$.



Σχήμα 2.1.2 Παράλληλες επιφάνειες A_1 και A_2 .

Επειδή $A_1 \ll A_2$ οι γωνίες θ_1 , θ_2 και η απόσταση S δεν εξαρτώνται από την θέση πάνω στην επιφάνεια A_1 και ο συντελεστής όψεως γράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned}
F_{1 \rightarrow 2} &= \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi S^2} dA_2 dA_1 = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} dA_1 \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi S^2} dA_2 = \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi S^2} dA_2 = \\
&= \int_{A_2} \frac{\cos^2 \theta}{\pi S^2} dA_2 = \int_0^{D/2} \frac{L^2}{\pi(L^2 + r^2)} 2\pi r dr = \frac{D^2}{D^2 + 4L^2}
\end{aligned}$$

Παραδείγματα όπου δεν απαιτείται υπολογισμός ολοκληρωμάτων

Να βρεθούν οι συντελεστές όψεως στις παρακάτω διατάξεις:

Παράδειγμα 2.1.2: Ομόκεντροι κύλινδροι με την αξονική απόσταση ανάμεσα στις βάσεις να τείνει στο άπειρο (Σχήμα 2.1.3α)

$$F_{11} + F_{12} = 1 \quad \text{και} \quad F_{11} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{12} = 1$$
$$F_{21} + F_{22} = 1 \quad \text{και} \quad A_2 F_{21} = A_1 F_{12} \quad \Rightarrow \quad F_{21} = \frac{A_1}{A_2} F_{12} = \frac{A_1}{A_2} \quad \Rightarrow \quad F_{22} = 1 - F_{21} = 1 - \frac{A_1}{A_2}$$

Παράδειγμα 2.1.2: Κύλινδρος με ακτίνες βάσεων $r_1 = r_2 = r$ και ύψους L (Σχήμα 2.1.3β)

N εξισώσεις από τον κανόνα αθροίσματος:

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1 \quad F_{21} + F_{22} + F_{23} = 1 \quad F_{31} + F_{32} + F_{33} = 1$$

$N(N-1)/2$ εξισώσεις από τον κανόνα αμοιβαιότητας:

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21} \quad A_1 F_{13} = A_3 F_{31} \Rightarrow F_{13} = F_{31} \quad A_2 F_{23} = A_3 F_{32}$$

Συμπληρωματικές σχέσεις συγκεκριμένης διάταξης: $F_{11} = 0, \quad F_{33} = 0$

Έχουμε 9 αγνώστους με 8 εξισώσεις και επομένως ένας συντελεστής θα προκύψει από την βιβλιογραφία:

$$F_{13} = \frac{1}{2} \left[S - \left[S^2 - 4 \frac{r_2^2}{r_1^2} \right]^{1/2} \right], \quad S = 1 + \frac{1 + R_2^2}{R_1^2}, \quad R_1 = r_1 / L, \quad R_2 = r_2 / L$$

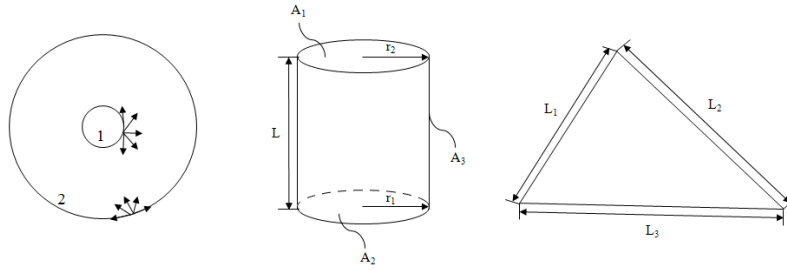
Παράδειγμα 2.1.3: Τρίγωνο με πλευρές L_1, L_2, L_3 (Σχήμα 2.1.3γ)

Κανόνας αθροίσματος: $F_{11} + F_{13} = 1, \quad F_{21} + F_{23} = 1, \quad F_{31} + F_{32} = 1$

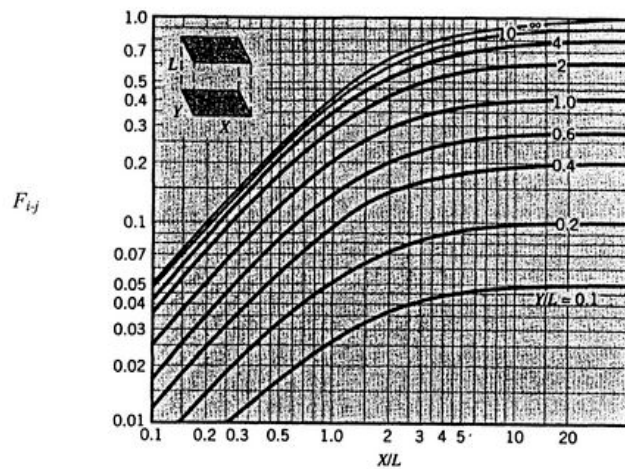
Κανόνας αμοιβαιότητας: $A_1 F_{12} = A_2 F_{21}, \quad A_1 F_{13} = A_3 F_{31}, \quad A_2 F_{23} = A_3 F_{32}$

Επιλύουμε το σύστημα των 6 εξισώσεων με τους 6 αγνώστους και βρίσκουμε:

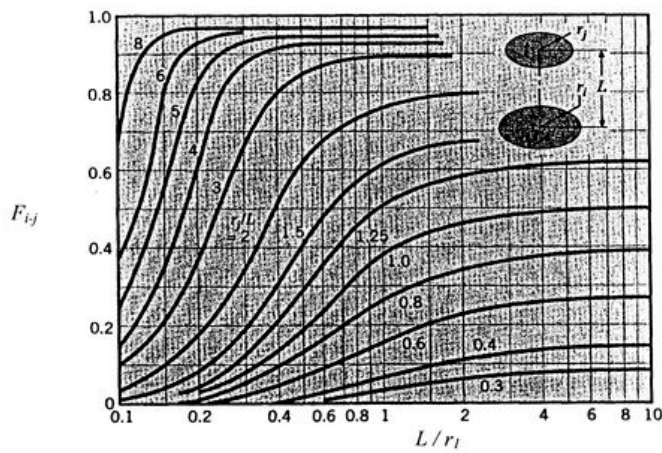
$$F_{12} = \frac{L_1 + L_2 - L_3}{2L_1}, \quad F_{13} = \frac{L_1 + L_3 - L_2}{2L_1}, \quad F_{23} = \frac{L_2 + L_3 - L_1}{2L_2}$$
$$F_{21} = \frac{L_2 + L_1 - L_3}{2L_2}, \quad F_{31} = \frac{L_3 + L_1 - L_2}{2L_3}, \quad F_{32} = \frac{L_3 + L_2 - L_1}{2L_3}$$



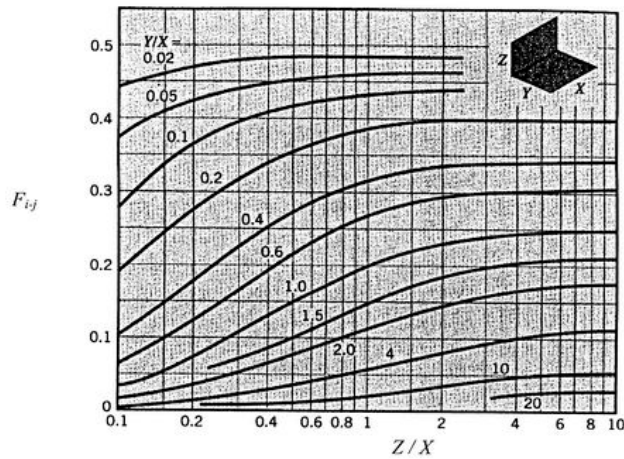
Σχήμα 2.1.3: Ομόκεντροι κύκλοι (αριστερά), κύλινδρος (μέση) και τρίγωνο (δεξιά). Σε πιο σύνθετες γεωμετρίες για τον υπολογισμό των συντελεστών όψεως είναι απαραίτητη η αριθμητική επίλυση των διπλών ολοκληρωμάτων (***) . Τα ολοκληρώματα αυτά έχουν υπολογισθεί για διάφορες γεωμετρίες και οι αντίστοιχοι συντελεστές όψεως βρίσκονται στη βιβλιογραφία (Σχήματα 2.1.3 και αντίστοιχα σχήματα 13.5-13.8 και πίνακες 13.1 και 13.2 στο βιβλίο των Cengel και Ghajar).



Σχήμα 2.1.4: Συντελεστής όψεως για ευθυγραμμισμένα παράλληλα ορθογώνια



Σχήμα 2.1.5: Συντελεστής όψεως για ομόκεντρος παράλληλους δίσκους



Σχήμα 2.1.6: Συντελεστής όψεως για κάθετα ορθογώνια με κοινή ακμή

Όλα αυτά τα αποτελέσματα που είναι διαθέσιμα στη βιβλιογραφία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογιστούν συντελεστές όψεως σε πιο σύνθετες γεωμετρίες. Η διαδικασία αυτή γίνεται πιο αποτελεσματική εάν εισάγουμε τις εξής επιπλέον βασικές σχέσεις μεταξύ των συντελεστώ όψεων:

Ο συντελεστής όψεως μιας επιφάνειας i προς μια επιφάνεια j μπορεί να υπολογισθεί ως το άθροισμα των συντελεστών όψεως της επιφάνειας i προς τις επιμέρους μικρότερες επιφάνειες που συνθέτουν την επιφάνεια j , δηλαδή

$$\text{εάν } A_j = \sum_{k=1}^K A_k \quad \text{τότε} \quad F_{i \rightarrow j} = \sum_{k=1}^K F_{i \rightarrow k}$$

Η παραπάνω σχέση, γνωστή ως ο **κανόνας της υπέρθεσης**, σημαίνει απλώς ότι η ακτινοβολία που προσπίπτει σε μια επιφάνεια ισούται με το άθροισμα της ακτινοβολίας που προσπίπτει στα επιμέρους τμήματα. Άρα μία σύνθετη επιφάνεια μπορεί να διασπαστεί σε επιμέρους απλούστερες επιφάνειες και να βρεθούν ευκολότερα οι επιμέρους συντελεστές όψεως.

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με A_j και εφαρμόζοντας τις σχέσεις αμοιβαιότητας προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} A_i F_{i \rightarrow j} &= A_i \sum_{k=1}^K F_{i \rightarrow k} \Rightarrow \\ A_j F_{j \rightarrow i} &= A_i F_{i \rightarrow j1} + A_i F_{i \rightarrow j2} + \dots + A_i F_{i \rightarrow jK} \Rightarrow \\ A_j F_{j \rightarrow i} &= A_{j1} F_{j1 \rightarrow i} + A_{j2} F_{j2 \rightarrow i} + \dots + A_{jK} F_{jK \rightarrow i} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$A_j F_{j \rightarrow i} = \sum_{k=1}^K A_{jk} F_{jk \rightarrow i} \Rightarrow F_{j \rightarrow i} = \frac{\sum_{k=1}^K A_{jk} F_{jk \rightarrow i}}{A_j}$$

Σε ιδιαίτερες σύνθετες γεωμετρίες όπου τα ολοκληρώματα δεν υπολογίζονται αναλυτικά αλλά αριθμητικά **οι αριθμητικές λύσεις πιστοποιούνται ικανοποιώντας τις σχέσεις αμοιβαιότητας και διατήρησης ενέργειας.**

Τέλος, **αρχές συμμετρίας** όπου είναι εφαρμόσιμες μπορούν να χρησιμοποιηθούν.

Μαθηματικές τεχνικές για τον υπολογισμό των συντελεστών όψεως:

Hottel's crossed - string method: βλέπε αμέσως παρακάτω

Contour integration: Apply Stokes theorem for reduction of the multiple integration over surface area to a single integration around the boundary of the area

Differentiation of known factors: Generation of view factors between differential elements by differencing known factors between finite elements.

Μέθοδος των διασταυρούμενων χορδών (Hottel's crossed - string method)

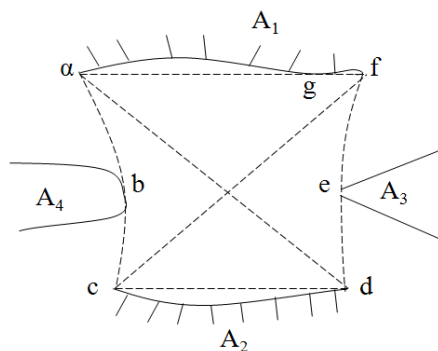
Εφαρμόζεται σε διατάξεις όπου η μία διάσταση εκτείνεται στο άπειρο και η λύση δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη διάσταση. Με τη εφαρμογή του νόμου των διασταυρούμενων χορδών είναι δυνατόν να υπολογίσουμε την μεταφορά θερμότητας με ακτινοβολία σε απέναντι πλευρές τετραπλεύρων και σε περιπτώσεις όπου υπάρχει μερική παρεμπόδιση ανάμεσα σε επιφάνειες από την ύπαρξη άλλων σωμάτων.

Μία τυπική διάταξη όπου εφαρμόζεται με επιτυχία η μέθοδος των διασταυρούμενων χορδών φαίνεται στο Σχήμα 2.1.6.

Τριγωνική κοιλότητα $fgabcf$: $F_{agf-abc} = \frac{A_{agf} + A_{abc} - A_{cf}}{2A_{agf}}$

Τριγωνική κοιλότητα $adefga$: $F_{agf-def} = \frac{A_{agf} + A_{def} - A_{ad}}{2A_{agf}}$

Επίσης $F_{agf-abc} + F_{agf-2} + F_{agf-def} = 1 \Rightarrow A_{agf} F_{agf-2} = A_{agf} (1 - F_{agf-abc} - F_{agf-def})$



Σχήμα 2.1.7: Τυπική διάταξη για την εφαρμογή της μεθόδου των διασταυρούμενων χορδών

Στη τελευταία σχέση αντικαθιστούμε τους συντελεστές όψεως και προκύπτει

$$A_{agf} F_{agf-2} = \frac{A_{cf} + A_{ad} - A_{abc} - A_{def}}{2}$$

Επίσης $A_{agf} F_{agf-2} = A_2 F_{2-agf} = A_2 F_{2-1} = A_1 F_{1-2}$ και επομένως

$$F_{1-2} = \frac{A_{cf} + A_{ad} - A_{abc} - A_{def}}{2A_1} = \frac{\sum \text{διασταυρούμενες χορδές} - \sum \text{μηδιασταυρούμενες χορδές}}{2 \times \text{επιφάνεια 1}}$$

2.2 Εναλλαγή ακτινοβολίας σε μέλανες (μαύρες) επιφάνειες

Έστω ότι οι δύο διαφορεικές επιφάνειες dA_1 και dA_2 του Σχήματος 2.1.1 έχουν τα χαρακτηριστικά των μελανών επιφανειών σε θερμοκρασίες T_1 και T_2 . Τότε η ισχύς ακτινοβολίας που απομακρύνεται από την dA_1 και προσπίπτει στην dA_2 είναι

$$dq|_{dA_1 \rightarrow dA_2} = I_{b,1} \cos \theta_1 dA_1 d\omega_{2-1} = I_{b,1} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{S^2} dA_1 dA_2 = E_{b,1} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi S^2} dA_1 dA_2$$

Αντίστοιχα, η ισχύς ακτινοβολίας που απομακρύνεται από την dA_2 και προσπίπτει στην dA_1 είναι

$$dq|_{dA_2 \rightarrow dA_1} = I_{b,2} \cos \theta_2 dA_2 d\omega_{1-2} = I_{b,2} \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_1}{S^2} dA_2 dA_1 = E_{b,2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi S^2} dA_1 dA_2$$

Επομένως η καθαρή μεταφερόμενη ισχύ ακτινοβολίας ανάμεσα στις επιφάνειες dA_1 και dA_2 είναι

$$dq|_{dA_1 \rightleftharpoons dA_2} = (E_{b,1} - E_{b,2}) \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi S^2} dA_1 dA_2 = \sigma (T_1^4 - T_2^4) \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi S^2} dA_1 dA_2$$

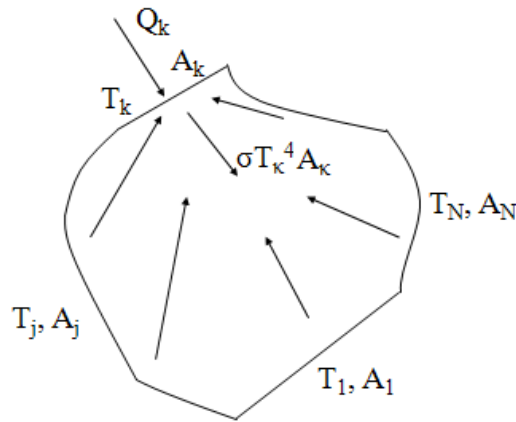
ή

$$dq|_{dA_1 \rightleftharpoons dA_2} = \sigma T_1^4 F_{d1-d2} dA_1 - \sigma T_2^4 F_{d2-d1} dA_2 = \sigma (T_1^4 - T_2^4) F_{d1-d2} dA_1 = \sigma (T_1^4 - T_2^4) F_{d2-d1} dA_2$$

Ολοκληρώνοντας ως προς τις επιφάνειες εύκολα προκύπτει ότι η καθαρή μεταφερόμενη ισχύ ακτινοβολίας ανάμεσα στις επιφάνειες A_1 και A_2 είναι

$$q|_{A_1 \rightleftharpoons A_2} = \sigma T_1^4 F_{1-2} A_1 - \sigma T_2^4 F_{2-1} A_2 = \sigma (T_1^4 - T_2^4) F_{1-2} A_1 = \sigma (T_1^4 - T_2^4) F_{2-1} A_2$$

Στη συνέχεια, η παραπάνω προσέγγιση που ισχύει για δύο μέλανες επιφάνειες, γενικεύεται θεωρώντας τη μεταφορά θερμότητας με ακτινοβολία ανάμεσα στις επιφάνειες μίας κοιλότητας που αποτελείται από N μέλανες επιφάνειες (Σχήμα 2.2.1).



Σχήμα 2.2.1: Ανταλλαγή ακτινοβολίας ανάμεσα σε μέλανες επιφάνειες μίας κοιλότητας

Διατυπώνουμε το ισοζύγιο θερμότητας σε μία τυχαία επιφάνεια A_k της κοιλότητας. Η θερμότητα που προσδίδεται στην επιφάνεια A_k ώστε η θερμοκρασία της να παραμένει T_k είναι Q_k .

Η ισχύ εκπομπής είναι $E_k = \sigma T_k^4 A_k$. Το ισοζύγιο θερμότητας περιγράφεται ως εξής:

$$Q_k = \sigma T_k^4 A_k - \sum_{j=1}^N \sigma T_j^4 A_j F_{jk},$$

όπου το άθροισμα είναι ως προς όλες τις επιφάνειες της κοιλότητας.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αμοιβαιότητας και $\sum_{j=1}^N F_{kj} = 1$ έχουμε ότι

$$Q_k = \sigma T_k^4 A_k - \sum_{j=1}^N \sigma T_j^4 A_j F_{jk} = \sigma T_k^4 A_k - \sum_{j=1}^N \sigma T_j^4 A_k F_{kj} = \sigma T_k^4 A_k \sum_{j=1}^N F_{kj} - \sum_{j=1}^N \sigma T_j^4 A_k F_{kj} \Rightarrow$$

$$Q_k = \sigma A_k \sum_{j=1}^N (T_k^4 - T_j^4) F_{kj}$$

Παράδειγμα 2.2.1: Έστω μία τριγωνική κοιλότητα με πλευρές A_1, A_2, A_3 που διατηρούνται στις θερμοκρασίες T_1, T_2, T_3 αντίστοιχα. Να υπολογισθούν οι θερμότητες Q_1, Q_2, Q_3 που προσδίδονται στις επιφάνειες ώστε να διατηρηθούν στις δεδομένες θερμοκρασίες.

Από τα ισοζύγια θερμότητας σε κάθε πλευρά της κοιλότητας έχουμε:

$$Q_1 = A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) + A_1 F_{13} \sigma (T_1^4 - T_3^4)$$

$$Q_2 = A_2 F_{21} \sigma (T_2^4 - T_1^4) + A_2 F_{23} \sigma (T_2^4 - T_3^4)$$

$$Q_3 = A_3 F_{31} \sigma (T_3^4 - T_1^4) + A_3 F_{32} \sigma (T_3^4 - T_2^4)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις εύκολα προκύπτουν οι ποσότητες Q_1, Q_2, Q_3 .

Εάν είναι γνωστές οι ποσότητες Q_1, Q_2, Q_3 και πρέπει να υπολογίσουμε τις θερμοκρασίες T_1, T_2, T_3 τότε είναι απαραίτητο να επιλύσουμε ένα μη γραμμικό σύστημα.

Παρατηρούμε ότι το ισοζύγιο

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 + Q_3 &= A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) + A_1 F_{13} \sigma (T_1^4 - T_3^4) + \\ &A_2 F_{21} \sigma (T_2^4 - T_1^4) + A_2 F_{23} \sigma (T_2^4 - T_3^4) + \\ &A_3 F_{31} \sigma (T_3^4 - T_1^4) + A_3 F_{32} \sigma (T_3^4 - T_2^4) = \\ &= A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) + A_1 F_{13} \sigma (T_1^4 - T_3^4) + \\ &A_1 F_{12} \sigma (T_2^4 - T_1^4) + A_2 F_{23} \sigma (T_2^4 - T_3^4) + \\ &A_1 F_{13} \sigma (T_3^4 - T_1^4) + A_2 F_{23} \sigma (T_3^4 - T_2^4) = 0 \end{aligned}$$

Σχέσεις όπως η παραπάνω μπορούν να χρησιμοποιούνται για να ελέγχεται η ορθότητα των υπολογισμών.

Γενικά, η ποσότητα Q_k είναι η ενέργεια που παρέχεται στην επιφάνεια k από άλλες μορφές μεταφοράς θερμότητας εκτός ακτινοβολίας (π.χ. αγωγή ή συναγωγή) ή η καθαρή απώλεια θερμότητας από την επιφάνεια k λόγω ακτινοβολίας στην κοιλότητα.

Όταν $Q_k > 0$ τότε προσδίδεται θερμότητα (η επιφάνεια θερμαίνεται), ενώ όταν το $Q_k < 0$ τότε απάγεται θερμότητα (η επιφάνεια ψύχεται) ώστε να διατηρηθούν οι συγκεκριμένες θερμοκρασίες των επιφανειών.

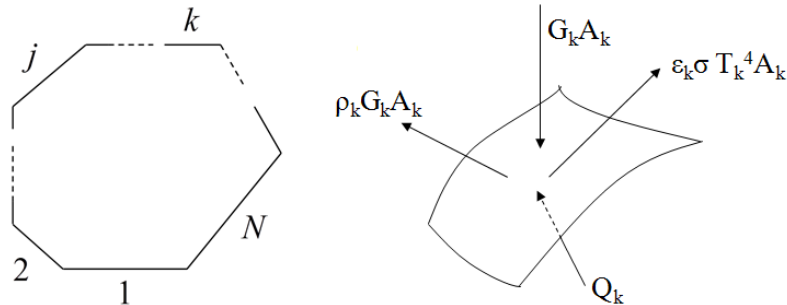
2.3 Εναλλαγή ακτινοβολίας σε αδιαφανείς, διαχυτικές και γκρίζες (φαιές) επιφάνειες

Έστω μία κοιλότητα που αποτελείται από N επιφάνειες (Σχήμα 2.3.1). Ο σκοπός είναι να μελετήσουμε τη μεταφορά θερμότητας με ακτινοβολία ανάμεσα στις επιφάνειες με τους εξής δύο τύπους οριακών συνθηκών:

α) Προσδιορισμός του ποσού θερμότητας που προσδίδεται σε μία επιφάνεια όταν η θερμοκρασία είναι δεδομένη και

β) Προσδιορισμός της θερμοκρασίας της επιφάνειας όταν η θερμότητα που προσδίδεται στην επιφάνεια είναι γνωστή.

Οι υπολογισμοί βασίζονται στη μέθοδο των **θερμικών ισοζυγίων** και εναλλακτικά στη μέθοδο **δικτύου**.



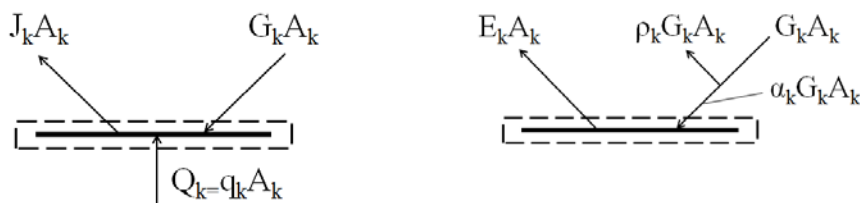
Σχήμα 2.3.1: Κοιλότητα με N επιφάνειες.

2.3.1 Θερμικά ισοζύγια

Διατυπώνουμε το ισοζύγιο θερμότητας σε μία τυχαία επιφάνεια A_k της κοιλότητας. Οι ποσότητες G_k και J_k δηλώνουν την ειδική ολική θερμοροή που προσπίπτει και που απομακρύνεται αντίστοιχα από την επιφάνεια k . Όπως έχει αναφερθεί είναι γνωστές ως ακτινοβόληση (irradiation) και ακτινοβόλος ισχύς (radiosity). Η ποσότητα θερμότητας ανά μονάδα επιφάνειας που προσδίδεται στην επιφάνεια ώστε να διατηρείται σε σταθερή θερμοκρασία συμβολίζεται με q_k .

Το ισοζύγιο θερμότητας περιγράφεται ως εξής: $Q_k = A_k q_k = A_k (J_k - G_k)$ (*)

$$\text{ή } Q_k = A_k q_k = A_k (E_k - \alpha_k G_k) \text{ (*}^1\text{)}$$



Σχήμα 2.3.2 : Θερμικά ισοζύγια: αριστερά σύμφωνα με την (*) και δεξιά σύμφωνα με την (*¹).

Η ακτινοβόλος ισχύς ισούται με την εκπεμπόμενη και την αντανακλώμενη ισχύς ακτινοβολίας, δηλαδή

$$J_k = E_k + \rho_k G_k = E_k + (1 - \alpha_k) G_k = \epsilon_k \sigma T_k^4 + (1 - \epsilon_k) G_k,$$

όπου έχουν χρησιμοποιηθεί οι σχέσεις $\rho_k = (1 - \alpha_k) = (1 - \varepsilon_k)$ που ισχύουν για αδιαφανείς και γκρίζες επιφάνειες.

$$\text{Επιλύοντας για την ακτινοβολήση βρίσκουμε } G_k = \frac{J_k - E_k}{1 - \varepsilon_k} = \frac{J_k - \varepsilon E_{bk}}{1 - \varepsilon_k}$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα αυτό στο ισοζύγιο ενέργειας (*) προκύπτει

$$Q_k = A_k \left(J_k - \frac{J_k - \varepsilon_k E_{bk}}{1 - \varepsilon_k} \right) \quad \text{ή} \quad Q_k = A_k \frac{\varepsilon_k}{1 - \varepsilon_k} (E_{bk} - J_k) \quad (**)$$

Για να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω εξίσωση θα πρέπει να γνωρίζουμε την ακτινοβολία ισχύ J_k .

Μία δεύτερη έκφραση για την ακτινοβολία ισχύ J_k προκύπτει υπολογίζοντας την ακτινοβολήση G_k της επιφάνειας από όλες τις επιφάνειες της κοιλότητας:

$$A_k G_k = A_1 J_1 F_{1k} + A_2 J_2 F_{2k} + \dots + A_j J_j F_{jk} + \dots + A_k J_k F_{kk} + \dots + A_N J_N F_{Nk} \Rightarrow$$

$$A_k G_k = \sum_{j=1}^N A_j F_{jk} J_j = \sum_{j=1}^N A_k F_{kj} J_j = A_k \sum_{j=1}^N F_{kj} J_j$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα αυτό στο ισοζύγιο ενέργειας (*) προκύπτει

$$Q_k = A_k \left(J_k - \sum_{j=1}^N F_{kj} J_j \right) \quad (***) \quad \text{ή} \quad Q_k = A_k \left(J_k \sum_{j=1}^N F_{kj} - \sum_{j=1}^N F_{kj} J_j \right) = A_k \sum_{j=1}^N F_{kj} (J_k - J_j)$$

Η ποσότητα Q_k είναι η θερμότητα που προσδίδεται στην επιφάνεια k με αγωγή ή/και συναγωγή ή εναλλακτικά η απώλεια θερμότητας από την επιφάνεια k λόγω ακτινοβολίας προς την κοιλότητα.

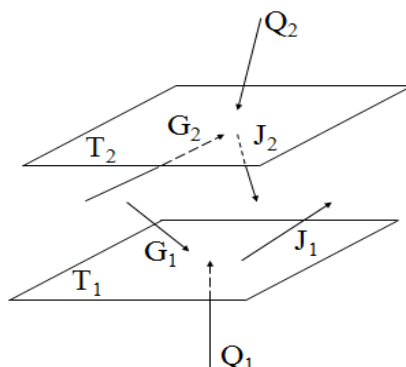
Οι εξισώσεις (**) και (***) είναι ισοζύγια ενέργειας ανάμεσα στη καθαρή μεταφορά θερμότητας με ακτινοβολία και στη θερμότητα που προσδίδεται με αγωγή ή/και συναγωγή.

Γράφοντας τις εξισώσεις (**) και (***) για κάθε επιφάνεια προκύπτουν $2N$ εξισώσεις για τους $2N$ αγνώστους που αποτελούνται από τις N ακτινοβόλες ισχύς J_j και ανάλογα με τις οριακές συνθήκες τις N θερμοροές Q_j ή θερμοκρασίες T_j .

Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι τα J_j μπορούν να απαλειφθούν και να απομείνουν μόνο N εξισώσεις για τα Q_j ή T_j .

Παράδειγμα 2.3.1:

Έστω δύο πολύ μεγάλες παράλληλες πλάκες με θερμοκρασίες T_1 και T_2 ($T_1 > T_2$). Να προσδιοριστεί η καθαρή θερμοροή ακτινοβολίας ανάμεσα στις πλάκες (Σχήμα 2.3.3).



Σχήμα 2.3.3: Μεταφορά θερμότητας με ακτινοβολία ανάμεσα σε παράλληλες πλάκες.

Προφανώς $F_{12} = F_{21} = 1$. Οι εξισώσεις (**) και (***) γράφονται ως εξής:

$$\text{Πλάκα 1: } \frac{Q_1}{A_1} = \frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} (\sigma T_1^4 - J_1) \quad \frac{Q_1}{A_1} = J_1 - J_2$$

$$\text{Πλάκα 2: } \frac{Q_2}{A_2} = \frac{\varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2} (\sigma T_2^4 - J_2) \quad \frac{Q_2}{A_2} = J_2 - J_1$$

Από τις (***) προκύπτει ότι $\frac{Q_1}{A_1} = -\frac{Q_2}{A_2}$, ενώ από τις (**) έχουμε

$$J_1 = \sigma T_1^4 - \frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \frac{Q_1}{A_1} \quad \text{και} \quad J_2 = \sigma T_2^4 - \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \frac{Q_1}{A_1} = \sigma T_2^4 + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \frac{Q_2}{A_2}$$

Αντικαθιστώντας τις δύο παραπάνω σχέσεις βρίσκουμε: $\frac{Q_1}{A_1} = -\frac{Q_2}{A_2} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$

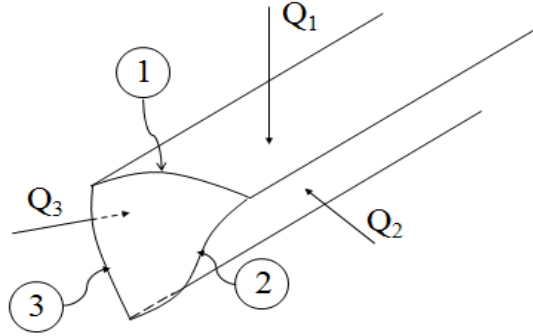
Εναλλακτικά θα μπορούσε να γνωρίζουμε τη θερμοροή Q_1 και θερμοκρασία T_2 και να υπολογίσουμε από το παραπάνω αποτέλεσμα την άγνωστη θερμοκρασία T_1 .

Για παράλληλες πλάκες με πεπερασμένες επιφάνειες A_1 και A_2 εφαρμόζοντας την αντίστοιχη ανάλυση προκύπτει ότι:

$$Q_1 = -Q_2 = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}}$$

Παράδειγμα 2.3.2:

Έστω τριγωνική κοιλότητα απείρου μήκους. Να υπολογισθούν οι θερμορροές Q_j στις επιφάνειες ώστε να παραμένουν στις θερμοκρασίες T_j , $j = 1, 2, 3$ (Σχήμα 2.3.4).



Σχήμα 2.3.4: Τριγωνική κοιλότητα απείρου μήκους.

$$\text{Πλευρά 1: } \frac{Q_1}{A_1} = \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} (\sigma T_1^4 - J_1) \quad \frac{Q_1}{A_1} = J_1 - F_{11} J_1 - F_{12} J_2 - F_{13} J_3$$

$$\text{Πλευρά 2: } \frac{Q_2}{A_2} = \frac{\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2} (\sigma T_2^4 - J_2) \quad \frac{Q_2}{A_2} = J_2 - F_{21} J_1 - F_{22} J_2 - F_{23} J_3$$

$$\text{Πλευρά 3: } \frac{Q_3}{A_3} = \frac{\varepsilon_3}{1-\varepsilon_3} (\sigma T_3^4 - J_3) \quad \frac{Q_3}{A_3} = J_3 - F_{31} J_1 - F_{32} J_2 - F_{33} J_3$$

Η πρώτη εξίσωση από τα 3 ζευγάρια εξισώσεων επιλύεται για τις ποσότητες J_1 , J_2 και J_3 και οι προκύπτουσες εκφράσεις αντικαθίστανται στην αντίστοιχη δεύτερη εξίσωση. Παίρνουμε το παρακάτω σύστημα τριών εξισώσεων για τα Q_1 , Q_2 και Q_3 :

$$\frac{Q_1}{A_1} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - F_{11} \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} \right) - \frac{Q_2}{A_2} F_{12} \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} - \frac{Q_3}{A_3} F_{13} \frac{1-\varepsilon_3}{\varepsilon_3} = (1-F_{11}) \sigma T_1^4 - F_{12} \sigma T_2^4 - F_{13} \sigma T_3^4$$

$$-\frac{Q_1}{A_1} F_{21} \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} + \frac{Q_2}{A_2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - F_{22} \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} \right) - \frac{Q_3}{A_3} F_{23} \frac{1-\varepsilon_3}{\varepsilon_3} = -F_{21} \sigma T_1^4 + (1-F_{22}) \sigma T_2^4 - F_{23} \sigma T_3^4$$

$$-\frac{Q_1}{A_1} F_{31} \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} - \frac{Q_2}{A_2} F_{32} \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} + \frac{Q_3}{A_3} \left(\frac{1}{\varepsilon_3} - F_{33} \frac{1-\varepsilon_3}{\varepsilon_3} \right) = -F_{31} \sigma T_1^4 - F_{32} \sigma T_2^4 + (1-F_{33}) \sigma T_3^4$$

Το γραμμικό σύστημα των τριών εξισώσεων επιλύεται για τους αγνώστους Q_1 , Q_2 και Q_3 . Για $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$ οι παραπάνω εξισώσεις ανάγονται σε αυτές του μέλανος σώματος που δεν αποτελούν σύστημα και είναι σε ρητή μορφή.

Όταν η επιφάνεια στη πίσω πλευρά της είναι καλά μονωμένη θεωρείται **αδιαβατική** και στη περίπτωση αυτή η καθαρή θερμοροή θεωρείται μηδενική, δηλαδή $Q_k = 0$.

Αυτό συνεπάγεται ότι η επιφάνεια επανακτινοβολεί όλη την προσπίπτουσα ακτινοβολία και ονομάζεται **επανακτινοβολούσα επιφάνεια** (reradiating surface).

Στις περιπτώσεις αυτές φαίνεται από την εξίσωση (***) ότι $J_k = E_{bk} = \sigma T_k^4$ και η **ακτινοβολός ισχύ δεν εξαρτάται από την ικανότητα εκπομπής ε_k** .

Ολοκληρώνοντας τη μέθοδο των θερμικών ισοζυγίων σημειώνεται ότι εξισώνοντας τις δεξιές πλευρές των εξισώσεων (***) και (***) απαλείφονται οι θερμοροές και προκύπτει ένα σύστημα N εξισώσεων που περιλαμβάνει τις ακτινοβόλους ισχύς J_k και τις θερμοκρασίες T_k :

$$\frac{\varepsilon_k}{1-\varepsilon_k} (E_{bk} - J_k) = \left(J_k - \sum_{j=1}^N F_{kj} J_j \right) \Rightarrow J_k - (1-\varepsilon_k) \sum_{j=1}^N F_{kj} J_j = \varepsilon_k \sigma T_k^4$$

Στη περίπτωση αυτή επιλύεται το σύστημα πρώτα για τα J_k και μετά από την (***) υπολογίζονται τα Q_k

Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να τονίσουμε ότι η μεθοδολογία βασίζεται στην υπόθεση ότι η ακτινοβολός ισχύς J_k στις εξισώσεις (***) και (***) που απομακρύνεται από κάθε επιφάνεια κατανέμεται ομοιόμορφα, δηλαδή είναι σταθερή σε όλη την επιφάνεια. Πολλές φορές αυτό δεν ισχύει και τότε οι λύσεις είναι προσεγγιστικές.

2.3.2 Δίκτυο θερμικών αντιστάσεων

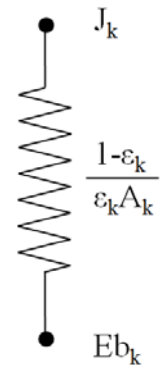
Εναλλακτικά, όταν ο αριθμός των επιφανειών είναι σχετικά μικρός εφαρμόζεται η μέθοδος του δικτύου που βασίζεται στη προσέγγιση των θερμικών ισοζυγίων με ηλεκτρικό κύκλωμα.

Για παράδειγμα στο ισοζύγιο $Q_k = A_k \frac{\varepsilon_k}{1 - \varepsilon_k} (E_{bk} - J_k)$ ισχύει ότι:

Διαφορά δυναμικού: $E_{bk} - J_k$

Ένταση ρεύματος: Q_k

Αντίσταση: $R_k = \frac{1 - \varepsilon_k}{A_k \varepsilon_k}$



2.4 Ασπίδες ακτινοβολίας

Οι ασπίδες ακτινοβολίας κατασκευάζονται από υλικά χαμηλής ικανότητας εκπομπής και υψηλή ικανότητα αντανάκλασης και χρησιμοποιούνται ώστε να ελαττώσουν την καθαρή θερμοροή ανάμεσα σε δύο επιφάνειες.

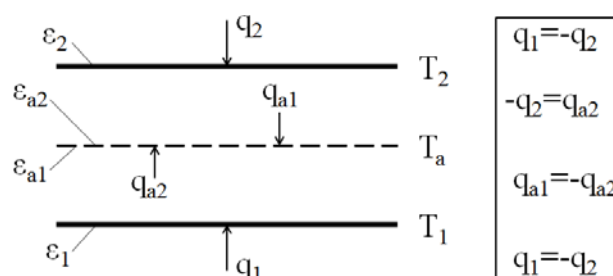
Έστω δύο παράλληλες πλάκες μεγάλης επιφάνειας σε θερμοκρασίες T_1 και T_2 με ικανότητα εκπομπής ε_1 και ε_2 . Όπως ήδη γνωρίζουμε η καθαρή εναλλαγή θερμότητας με ακτινοβολία είναι

$$\frac{Q_1}{A} = q_1 = -q_2 = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

Εάν τοποθετήσουμε ανάμεσα μία τρίτη πλάκα σε θερμοκρασία T_α με ικανότητα εκπομπής $\varepsilon_{\alpha 1}$, $\varepsilon_{\alpha 2}$ προς τη πλάκα 1 και 2 αντίστοιχα τότε έχουμε:

$$q_1 = -q_{\alpha 1} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_\alpha^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_{\alpha 1}} - 1} = \frac{\sigma T_1^4}{A} - \frac{\sigma T_\alpha^4}{A}$$

$$q_{\alpha 2} = -q_2 = \frac{\sigma(T_\alpha^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_{\alpha 2}} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} = \frac{\sigma T_\alpha^4}{B} - \frac{\sigma T_2^4}{B}$$



Επίσης ισχύει ότι $q_{\alpha 1} = -q_{\alpha 2}$ και $q_1 = -q_2$

$$q_1 = -q_{\alpha 1} = q_{\alpha 2} = -q_2 \Rightarrow \frac{\sigma T_1^4}{A} - \frac{\sigma T_\alpha^4}{A} = \frac{\sigma T_\alpha^4}{B} - \frac{\sigma T_2^4}{B} \Rightarrow \sigma T_\alpha^4 \left(\frac{1}{B} + \frac{1}{A} \right) = \frac{\sigma T_1^4}{A} + \frac{\sigma T_2^4}{B} \Rightarrow$$

$$\frac{\sigma T_\alpha^4}{A} = \left(\frac{\sigma T_1^4}{A} + \frac{\sigma T_2^4}{B} \right) / \left(1 + \frac{A}{B} \right), \quad \text{αντικαθιστούμε τη ποσότητα αυτή στο } q_1:$$

$$q_1 = \frac{\sigma T_1^4}{A} - \frac{\frac{\sigma T_1^4}{A} + \frac{\sigma T_2^4}{B}}{1 + \frac{A}{B}} = \frac{\sigma T_1^4}{A} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{A}{B}} \right) - \frac{\sigma T_2^4}{B} \left(\frac{1}{1 + \frac{A}{B}} \right) = \frac{\sigma T_1^4 - \sigma T_2^4}{A + B} \Rightarrow$$

$$q_1 = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_{\alpha 1}} - 1 + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_{\alpha 2}} - 1} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1 - \varepsilon_{\alpha 1}}{\varepsilon_{\alpha 1}} + \frac{1 - \varepsilon_{\alpha 2}}{\varepsilon_{\alpha 2}} + \frac{1}{\varepsilon_2}}$$

Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές των $\varepsilon_{\alpha 1}$, $\varepsilon_{\alpha 2}$ η θερμορροή μειώνεται δραστικά.

Για N ασπίδες ακτινοβολίας με όλα τα ε ίσα (και των πλακών) αποδεικνύεται ότι η ακτινοβολία μειώνεται $N+1$ φορές.

Παράδειγμα 2.4.1:

Κρυογενικό ρευστό ρέει σε κυλινδρικό αγωγό μεγάλου μήκους και διαμέτρου D_1 , του οποίου η εξωτερική επιφάνεια είναι διαχυτική και γκρίζα με ε_1 και θερμοκρασία T_1 . Ο αγωγός προστατεύεται από εξωτερικό ομόκεντρο κύλινδρο διαμέτρου D_2 με ε_2 και θερμοκρασία T_2 . Ο χώρος μεταξύ των δύο κυλίνδρων είναι σε πολύ χαμηλή πίεση (κενό) με αποτέλεσμα η μετάδοση θερμότητας να γίνεται μόνο με ακτινοβολία.

Το ποσό θερμότητας ανά μονάδα μήκους που μεταφέρεται στον κρυογενικό σωλήνα είναι:

$$\frac{q}{L} = \frac{(\pi D_1) \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \frac{D_1}{D_2}}$$

Για να μειωθεί η θέρμανση του κρυογενικού αγωγού τοποθετείται κυλινδρική ασπίδα ακτινοβολίας διαμέτρου D_α και $\varepsilon_{\alpha 1} = \varepsilon_{\alpha 2}$ στη μέση της απόστασης ανάμεσα στον εσωτερικό και εξωτερικό κύλινδρο. Να υπολογισθεί η μειωμένη θερμορροή που προσδίδεται στον κρυογενικό σωλήνα.

Η θερμορροή δίδεται από τη σχέση (να αποδειχθεί)

$$\frac{q'}{L} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \frac{1}{\pi D_1} + \frac{1}{\pi D_1 F_{1\alpha}} + 2 \frac{1 - \varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\alpha} \frac{1}{\pi D_\alpha} + \frac{1}{\pi D_\alpha F_{\alpha 2}} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \frac{1}{\pi D_2}}$$

$$\frac{q'}{L} = \frac{(\pi D_1) \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1 - \varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\alpha} \frac{D_1}{D_\alpha} + \frac{1}{\varepsilon_\alpha} \frac{D_1}{D_\alpha} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \frac{D_1}{D_2}}$$

Επίσης ο λόγος των θερμορροών είναι

$$\frac{q'}{q} = \frac{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \frac{D_1}{D_2}}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1 - \varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\alpha} \frac{D_1}{D_\alpha} + \frac{1}{\varepsilon_\alpha} \frac{D_1}{D_\alpha} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \frac{D_1}{D_2}} = \frac{A}{A + \frac{2 - \varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\alpha} \frac{D_1}{D_\alpha}}$$

Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές του ε_α η θερμορροή μειώνεται δραστικά.

Επίσης, θα πρέπει ο λόγος D_1 / D_α να είναι όσο πιο κοντά στη μονάδα, δηλαδή η ασπίδα προστασίας θα πρέπει να βρίσκεται όσο γίνεται πιο κοντά στον εσωτερικό αγωγό αυξάνοντας τη θερμική προστασία του κρυογενικού αγωγού.

2.5 Γενίκευση σε επιφάνειες με μη ομοιόμορφη προσπίπτουσα, ανακλώμενη και εκπεμπόμενη ακτινοβολία

Η μέχρι τώρα ανάλυση βασίζεται στην διαίρεση της κοιλότητας σε επιμέρους επιφάνειες πεπερασμένου εμβαδού και στη συνέχεια γίνεται η υπόθεση ότι η θερμοκρασία, η ακτινοβολήση και η ακτινοβόλος ισχύς παραμένουν ομοιόμορφες και σταθερές σε κάθε επιφάνεια της κοιλότητας.

Εάν σε κάποια από τις επιμέρους επιφάνειες **οι ποσότητες αυτές δεν είναι σταθερές** η επιφάνεια θα πρέπει να διαιρεθεί σε μικρότερα τμήματα έτσι ώστε σε κάθε τμήμα οι ποσότητες αυτές να είναι σταθερές.

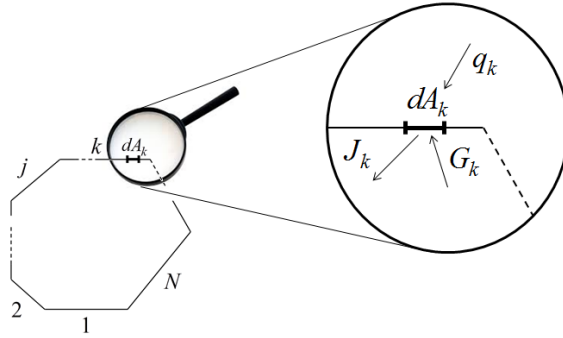
Ακολουθώντας αυτή τη προσέγγιση οι επιφάνειες της κοιλότητας ή κάποιες από αυτές θα διαιρούνται σε απειροστά μικρά τμήματα και πλέον θα είναι δυνατόν να ληφθούν υπόψη μεγάλες αλλαγές στα μεγέθη T , Q , G και J .

Η προσέγγιση αυτή μας οδηγεί στη διατύπωση των ισοζυγίων θερμότητας μέσω ολοκληρωτικών εξισώσεων που επιλύονται αναλυτικά και αριθμητικά.

Θεωρούμε πάλι μία κοιλότητα που αποτελείται από N επιφάνειες πεπερασμένου εμβαδού και η κάθε μία διαιρείται σε διαφορετικές επιφάνειες, δηλαδή σε επιφάνειες με απειροστά μικρό εμβαδόν (Σχήμα 2.5.1).

Παραμένει η υπόθεση ότι οι επιφάνειες είναι διαχυτικές και γκρίζες.

Ο επιπλέον περιορισμός είναι ότι οι ιδιότητες ακτινοβολίας είναι ανεξάρτητες της θερμοκρασίας.



Σχήμα 2.5.1: Κοιλότητα με N επιφάνειες με μη ομοιόμορφη ακτινοβολία.

Το ισοζύγιο θερμότητας στην επιφάνεια dA_k περιγράφεται ως εξής: $q_k = J_k - G_k$ (*)

Η ακτινοβόλος ισχύς ισούται με την εκπεμπόμενη και την αντανακλώμενη ισχύ ακτινοβολίας:

$$J_k = E_k + \rho_k G_k = E_k + (1 - \alpha_k) G_k = \varepsilon_k \sigma T_k^4 + (1 - \varepsilon_k) G_k$$

Επιλύοντας για την ακτινοβόληση βρίσκουμε

$$G_k = \frac{J_k - E_k}{1 - \varepsilon_k} = \frac{J_k - \varepsilon E_{bk}}{1 - \varepsilon_k}$$

το αποτέλεσμα αυτό στο ισοζύγιο ενέργειας (*) προκύπτει

$$q_k = J_k - \frac{J_k - \varepsilon_k E_{bk}}{1 - \varepsilon_k} \quad \text{ή} \quad q_k = \frac{\varepsilon_k}{1 - \varepsilon_k} (E_{bk} - J_k) = \frac{\varepsilon_k}{1 - \varepsilon_k} (\sigma T_k^4 - J_k) \quad (**)$$

Για να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω εξίσωση θα πρέπει να γνωρίζουμε την ακτινοβόλο ισχύ J_k .

Μία δεύτερη έκφραση για την ακτινοβόλο ισχύ J_k προκύπτει υπολογίζοντας την ακτινοβόληση G_k της επιφάνειας από όλες τις επιφάνειες της κοιλότητας:

$$dA_k G_k = \int_{A_1} J_1(\mathbf{r}_1) dF_{d1-dk}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_k) dA_1 + \int_{A_2} J_2(\mathbf{r}_2) dF_{d2-dk}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_k) dA_2 + \dots$$

$$+ \int_{A_j} J_j(\mathbf{r}_j) dF_{dj-dk}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k) dA_j + \dots + \int_{A_k} J_k(\mathbf{r}_k^*) dF_{dk^*-dk}(\mathbf{r}_k^*, \mathbf{r}_k) dA_k + \dots + \int_{A_N} J_N(\mathbf{r}_N) dF_{dN-dk}(\mathbf{r}_N, \mathbf{r}_k) dA_N$$

Εισάγοντας το κανόνα της αμοιβαιότητας

$$\int_{A_j} J_j(\mathbf{r}_j) dF_{dj-dk}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k) dA_j = \int_{A_j} J_j(\mathbf{r}_j) dF_{dk-dj}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k) dA_k = dA_k \int_{A_j} J_j(\mathbf{r}_j) dF_{dk-dj}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k)$$

στη παραπάνω σχέση βρίσκουμε $dA_k G_k = dA_k \sum_{j=1}^N \int_{A_j} J_j(\mathbf{r}_j) dF_{dk-dj}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k)$.

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα αυτό στο ισοζύγιο ενέργειας (*) προκύπτει

$$q_k = J_k - \sum_{j=1}^N \int_{A_j} J_j(\mathbf{r}_j) dF_{dk-dj}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k) \quad (***)$$

Υπενθυμίζουμε ότι με βάση τον ορισμό $dF_{dk-dj} = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi S^2} dA_j$ ο συντελεστής όψεως dF_{dk-dj} περιλαμβάνει την διαφορική επιφάνεια dA_j .

Συνηθίζεται η εξίσωση (***) να γράφεται στη πιο βολική μορφή

$$q_k = J_k - \sum_{j=1}^N \int_{A_j} J_j(\mathbf{r}_j) K(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k) dA_j$$

όπου $K(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k) = dF_{dk-dj}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k) / dA_j$ είναι ο **πυρήνας** (kernel) της ολοκληρωτικής εξίσωσης.

Γενικά έχουμε και πάλι δύο περιπτώσεις:

1. Όταν οι θερμοκρασίες και οι θερμοροές είναι σημαντικές τότε οι (**) και (***) συνδυάζονται και απαλείφονται οι ακτινοβολός ισχύς, ώστε να προκύψει ένα σύστημα που να συνδέει τις θερμοκρασίες με τις θερμοροές.
2. Όταν οι ακτινοβολός ισχύς είναι σημαντικές τότε οι (**) και (***) συνδυάζονται και απαλείφονται οι θερμοροές, ώστε να προκύψει ένα σύστημα που συνδέει τις θερμοκρασίες με τις ακτινοβόλους ισχύς.

Στη δεύτερη περίπτωση το σύστημα έχει τη μορφή $J_k - (1 - \varepsilon_k) \sum_{j=1}^N \int_{A_j} J_j(\mathbf{r}_j) dF_{dk-dj}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k) = \varepsilon_k \sigma T_k^4$

Παράδειγμα 2.5.1:

Έστω τριγωνική κοιλότητα που στην αξονική διεύθυνση εκτείνεται στο άπειρο. Η πλευρά 1 θερμαίνεται ομοιόμορφα, η πλευρά 2 είναι σε ομοιόμορφη θερμοκρασία και η πλευρά 3 έχει χαρακτηριστικά μελανής επιφάνειας σε θερμοκρασία μηδέν. Να βρεθεί η ολοκληρωτική εξίσωση που περιγράφει τη κατανομή θερμοκρασίας της πλευράς 1.

$$q_1 = \text{σταθερή} \quad q_2 = q_2(\mathbf{r}_2) \quad T_3 = 0 \quad \varepsilon_3 = 1$$

$$\text{Πλευρά 1: } J_1(\mathbf{r}_1) = \sigma T_1^4 - \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} q_1$$

$$\text{Πλευρά 2: } J_2(\mathbf{r}_2) = \sigma T_2^4 - \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} q_2(\mathbf{r}_2)$$

$$\text{Πλευρά 3: } J_3 = \sigma T_3^4 - \frac{1-\varepsilon_3}{\varepsilon_3} q_3 \quad \Rightarrow \quad J_3 = 0$$

$$\text{Πλευρά 1: } q_1 = J_1(\mathbf{r}_1) - \int_{A_2} J_2(\mathbf{r}_2) dF_{d1-d2}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) - \int_{A_3} J_3(\mathbf{r}_3) dF_{d1-d3}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1)$$

$$q_1 = \sigma T_1^4 - \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} q_1 - \int_{A_2} \left[\sigma T_2^4 - \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} q_2 \right] dF_{d1-d2}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$$

$$q_1 + \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} q_1 = \sigma T_1^4 - \sigma T_2^4 \int_{A_2} dF_{d1-d2}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} \int_{A_2} q_2 dF_{d1-d2}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$$

$$q_1 \frac{1}{\varepsilon_1} = \sigma T_1^4 - \sigma T_2^4 \int_{A_2} dF_{d1-d2}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} \int_{A_2} q_2(\mathbf{r}_2) dF_{d1-d2}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$$

$$\text{Πλευρά 2: } q_2 = J_2(\mathbf{r}_2) - \int_{A_1} J_1(\mathbf{r}_1) dF_{d2-d1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \int_{A_3} J_3(\mathbf{r}_3) dF_{d2-d3}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2)$$

$$q_2 = \sigma T_2^4 - \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} q_2(\mathbf{r}_2) - \int_{A_1} \left[\sigma T_1^4 - \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} q_1 \right] dF_{d2-d1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

$$q_2(\mathbf{r}_2) \frac{1}{\varepsilon_2} = \sigma T_2^4 - \int_{A_1} \sigma T_1^4 dF_{d2-d1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + q_1 \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} \int_{A_1} dF_{d2-d1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

Πλευρά 3: Δεν χρειάζεται η αντίστοιχη εξίσωση αφού οι δύο παραπάνω δεν περιέχουν την θερμορροή q_3 αφού $\varepsilon_3 = 1$ και $T_3 = 0$.

Οι παραπάνω 2 εξισώσεις απλοποιούνται εάν εισάγουμε τις σχέσεις

$$\int_{A_2} dF_{d1-d2}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = F_{d1-2} \quad \text{και} \quad \int_{A_1} dF_{d2-d1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = F_{d2-1}$$

Τα ισοζύγια θερμότητας ξαναγράφονται στη μορφή:

$$q_1 \frac{1}{\varepsilon_1} = \sigma T_1(\mathbf{r}_1)^4 - \sigma T_2^4 F_{d1-2} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} \int_{A_2} q_2(\mathbf{r}_2) dF_{d1-d2}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$$

$$q_2(\mathbf{r}_2) \frac{1}{\varepsilon_2} = \sigma T_2^4 - \int_{A_1} \sigma T_1(\mathbf{r}_1)^4 dF_{d2-d1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + q_1 \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} F_{d2-1}$$

Το σύστημα των δύο ολοκληρωτικών εξισώσεων επιλύεται για τους αγνώστους $q_2(\mathbf{r}_2)$ και $T_1(\mathbf{r}_1)$.

Η μεθοδολογία υπολογισμού των θερμορροών με ακτινοβολία ανάμεσα σε γκρίζες και διαχυτικές επιφάνειες κοιλοτήτων επεκτείνεται και σε **επιλεκτικές επιφάνειες** όπου οι ικανότητες εκπομπής των επιφανειών **εξαρτώνται από το μήκος κύματος** εφαρμόζοντας τα θερμικά ισοζύγια εντός των φασματικών ζωνών.

Για παράδειγμα η μεταφορά θερμότητας με ακτινοβολία μήκους κύματος λ ανάμεσα σε δύο πολύ μεγάλες παράλληλες πλάκες με θερμοκρασίες T_1 και T_2 είναι

$$dq_{\lambda,1} = -dq_{\lambda,2} = \frac{E_{\lambda b,1}(\lambda, T_1) - E_{\lambda b,2}(\lambda, T_2)}{\frac{1}{\varepsilon_{\lambda,1}(\lambda, T_1)} + \frac{1}{\varepsilon_{\lambda,2}(\lambda, T_2)} - 1} d\lambda,$$

ενώ η συνολική ειδική θερμορροή προκύπτει ολοκληρώνοντας σε όλο το φάσμα:

$$q_1 = -q_2 = \int_0^{\infty} dq_{\lambda,1} = \int_0^{\infty} \left[\frac{E_{\lambda b,1}(\lambda, T_1) - E_{\lambda b,2}(\lambda, T_1)}{\frac{1}{\varepsilon_{\lambda,1}(\lambda, T_1)} + \frac{1}{\varepsilon_{\lambda,2}(\lambda, T_2)} - 1} \right] d\lambda$$

2.6 Πολυμορφική μεταφορά θερμότητας

Μετάδοση θερμότητας με συνδυασμό των τριών βασικών μηχανισμών μεταφοράς θερμότητας, δηλαδή αυτών της αγωγής, της συναγωγής και της ακτινοβολίας συναντάται συχνά σε πολλά τεχνολογικά πεδία και εφαρμογές. Εδώ, αναφέρεται περιληπτικά **μετάδοση θερμότητας με συνδυασμό των τριών βασικών**

μηχανισμών στα όρια του προβλήματος, δηλαδή οι οριακές συνθήκες προκύπτουν με ισοζύγιο θερμότητας που περιλαμβάνουν τους δύο ή και τους τρεις βασικούς μηχανισμούς.

Ισχύουν οι ίδιοι περιορισμοί σε σχέση με τη μετάδοση θερμότητας με ακτινοβολία, δηλαδή θεωρούμε ότι **οι επιφάνειες είναι αδιαφανείς, ενώ το μέσο που βρίσκεται ανάμεσα στις επιφάνειες που ανταλλάσσουν θερμότητα είναι απόλυτα διαπερατό στην ακτινοβολία**. Το μέσο αυτό είναι πιθανόν να μεταφέρει θερμότητα με αγωγή ή/και συναγωγή αλλά δεν αλληλεπιδρά με την ακτινοβολία. Η υπόθεση αυτή ισχύει για αέρα, οξυγόνο, άζωτο αλλά δεν ισχύει για υδρατμούς, μονοξείδιο και διοξείδιο του άνθρακα που συμπεριφέρονται περισσότερο σαν στερεά.

Οι διάφορες μορφές μετάδοσης θερμότητας είναι πιθανόν να συνδέονται σειριακά ή παράλληλα ή και τα δύο. Εξετάζονται η κάθε μία χωριστά και στη συνέχεια προστίθενται.

Ακτινοβολία: η θερμοροή ανάμεσα σε μαύρες επιφάνειες εξαρτάται από τη θερμοκρασία των επιφανειών στη 4^η δύναμη. Για μη μέλανες επιφάνειες ο εκθέτης μπορεί να είναι διαφορετικός ανάλογα από την εξάρτηση της ικανότητας εκπομπής ως προς τη θερμοκρασία.

$$\text{Ακτινοβολία: } q_{rad} \sim T^4 \text{ (όταν οι ιδιότητες των επιφανειών είναι σταθερές)}$$

Θερμική αγωγή: η θερμοροή εξαρτάται από τη τοπική βαθμίδα θερμοκρασίας.

$$\text{Αγωγή: } q_{cond} \sim \Delta T \text{ (όταν ο συντελεστής θερμικής αγωγής είναι σταθερός)}$$

Συναγωγή: η θερμοροή είναι ανάλογη της διαφοράς θερμοκρασίας ΔT συνήθως στη 1^η δύναμη. Βέβαια ο εκθέτης εξαρτάται από τον τύπο της ροής και από την εξάρτηση των φυσικών ιδιοτήτων ως προς τη θερμοκρασία.

$$\text{Εξαναγκασμένη: } q_{conv} \sim \Delta T \text{ (όταν ο συντελεστής συναγωγής είναι σταθερός)}$$

$$Nu = \frac{hL}{k} = Nu \left(Re, Pr, \frac{x}{L} \right) \left(Re, Pr = \frac{v}{\alpha}, k \text{ εξαρτώνται από } T \right)$$

$$\text{Ελεύθερη ή φυσική: } q_{conv} \sim \Delta T^n, 1.25 \leq n \leq 1.4$$

$$Nu = \frac{hL}{k} = Nu \left(Pr, Gr, \frac{x}{L} \right), \quad Gr = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu^2}$$

Παράδειγμα 2.6.1:

Έστω δύο παράλληλες γκριζες και διαχυτικές πλάκες σε απόσταση b μεταξύ των οποίων βρίσκεται διαπερατό αέριο θερμικής αγωγής k . Οι θερμοκρασίες των πλακών είναι T_1 και T_2 . Λόγω της διαφοράς θερμοκρασίας έχουμε μετάδοση θερμότητας με

ακτινοβολία και θερμική αγωγή. Η θερμότητα Q_1 που προσδίδεται στην πλάκα 1 ώστε να παραμένει σε θερμοκρασία T_1 υπολογίζεται με βάση το θερμικό ισοζύγιο (πλάκα 1):

$$\frac{Q_1}{A} = \frac{Q_{rad}}{A} + \frac{Q_{cond}}{A} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1(T_1)} + \frac{1}{\varepsilon_2(T_2)} - 1} + \frac{k}{b}(T_1 - T_2)$$

Στη περίπτωση που είναι γνωστές οι θερμοκρασίες T_1 , T_2 ο υπολογισμός μεταφοράς θερμότητας με ακτινοβολία και θερμική αγωγή γίνεται ανεξάρτητα και προστίθενται στη συνέχεια. Το πρόβλημα είναι **διαχωρίσιμο**.

Αντίθετα όταν είναι γνωστή η θερμότητα Q_1 και μία από τις δύο θερμοκρασίες T_1 , T_2 , το πρόβλημα είναι **συζευγμένο** και η άγνωστη θερμοκρασία προκύπτει από την επίλυση μη γραμμικής αλγεβρικής εξίσωσης.

Παράδειγμα 2.6.2:

Έστω δύο παράλληλες γκρίζες και διαχυτικές πλάκες πεπερασμένου πάχους a σε απόσταση b μεταξύ των οποίων βρίσκεται διαπερατό αέριο. Οι θερμοκρασίες των εσωτερικών επιφανειών των πλακών είναι T_1 και T_2 . Λόγω της διαφοράς θερμοκρασίας έχουμε μετάδοση θερμότητας ανάμεσα στις πλάκες με **ακτινοβολία και ελεύθερη συναγωγή**. Η θερμότητα Q_1 που προσδίδεται στην πλάκα 1 ώστε να παραμένει σε θερμοκρασία T_1 υπολογίζεται με βάση το θερμικό ισοζύγιο (πλάκα 1)

$$\frac{Q_1}{A} = \frac{Q_{rad}}{A} + \frac{Q_{conv}}{A} \Rightarrow$$

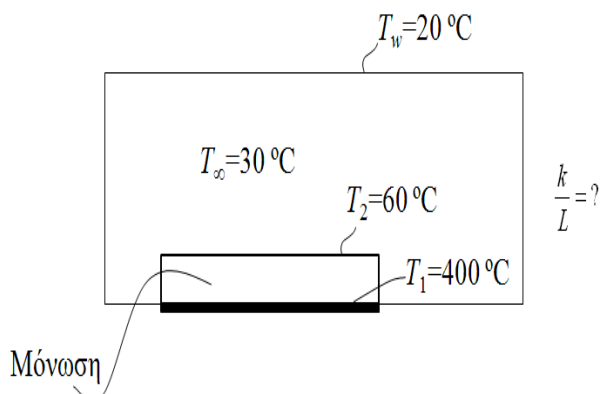
$$-k_w \left. \frac{dT}{dx} \right|_1 = \frac{k_w}{a}(T_0 - T_1) = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1(T_1)} + \frac{1}{\varepsilon_2(T_2)} - 1} + h_{fc}(T_1 - T_2),$$

όπου k_w ο συντελεστής αγωγής της πλάκας 1, h_{fc} ο συντελεστής ελεύθερης συναγωγής του αερίου και T_0 η θερμοκρασία της εξωτερικής επιφάνειας της πλάκας 1.

Παράδειγμα 3.6.3:

Επιφάνεια 1m^2 βρίσκεται σε $T_1 = 400^\circ\text{C}$ και πρέπει να μονωθεί έτσι ώστε η θερμοκρασία στην εξωτερική επιφάνεια της μόνωσης να είναι $T_2 = 60^\circ\text{C}$ όταν η θερμοκρασία του περιβάλλοντος αέρα είναι $T_\infty = 30^\circ\text{C}$ και τα τοιχώματα που

περικλείουν τη διάταξη βρίσκονται σε $T_w = 20^\circ\text{C}$ (βλέπε σχήμα). Να υπολογιστεί ο συντελεστής μόνωσης k / L .



Ισοζύγιο θερμότητας στην επιφάνεια 2:

$$\frac{k}{L}(T_1 - T_2) = \varepsilon_2 \sigma (T_2^4 - T_w^4) + h_{conv} (T_2 - T_\infty) = h_{rad} (T_2 - T_w) + h_{conv} (T_2 - T_\infty)$$

$$h_{rad} = \varepsilon_2 \sigma (T_2^2 + T_w^2)(T_2 + T_w) = 0.9 \times 5.67 \times 10^{-8} (333^2 + 293^2)(333 + 293) = 6.35 \text{ W/m}^2/\text{C}$$

Στη συνέχεια ο συντελεστής h_{conv} προκύπτει από τον αριθμό $Nu = h_{conv} L / k$.

$$Ra = Gr \times Pr = \frac{g \beta (T_2 - T_\infty) L^3 Pr}{\nu^2} = g \frac{2}{(T_2 + T_\infty)} \frac{(T_2 - T_\infty) L^3 Pr}{\nu^2} = \frac{9.81 \times 30 \times 1^3 \times 0.7}{318 (1.74 \times 10^{-5})^2} = 2.15 \times 10^9$$

Πίνακα 9.1 (για συγκεκριμένη γεωμετρία): $Nu = 0.15 Ra^{1/3} = 193 \Rightarrow h_{conv} = 5.34 \text{ W/m}^2/\text{C}$ (9.23)

Επομένως:

$$q = h_{rad} (T_2 - T_w) + h_{conv} (T_2 - T_\infty) = 414 \text{ W/m}^2 \text{ και } \frac{k}{L} = \frac{q}{T_1 - T_2} = \frac{414}{400 - 60} = 1.22 \text{ W/m}^2/\text{C}$$

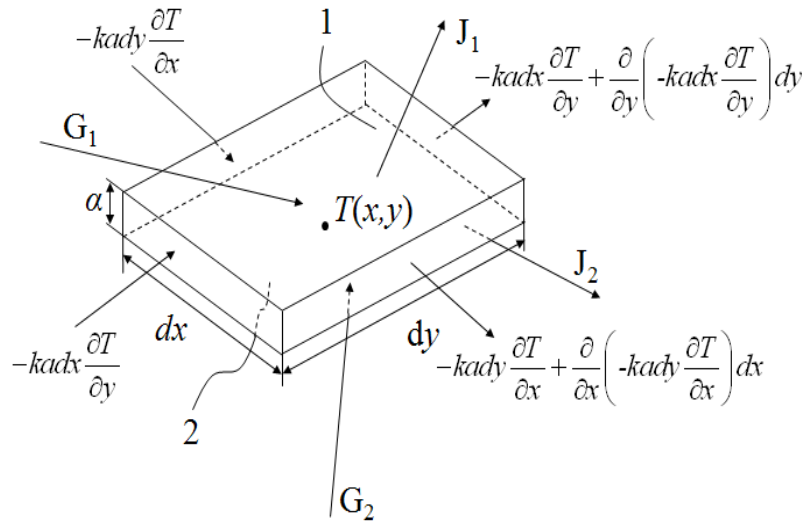
Έστω το ίδιο πρόβλημα όμως τώρα η θερμοκρασία T_2 είναι άγνωστη και πρέπει να υπολογιστεί, ενώ δίδεται ο συντελεστής θερμικής αγωγής έστω $k / L = 1 \text{ W/m}^2/\text{C}$. Επιλύοντας το ισοζύγιο θερμότητας για T_2 προκύπτει:

$$T_2 = \frac{h_{conv} (T_2) T_\infty + h_{rad} (T_2) T_w + \frac{k}{L} T_1}{h_{conv} (T_2) + h_{rad} (T_2) + \frac{k}{L}}$$

Επειδή οι συντελεστές h_{conv} και h_{rad} εξαρτώνται από την άγνωστη θερμοκρασία T_2 απαιτείται επαναληπτική θερμοκρασία.

Σε μερικές περιπτώσεις είναι χρήσιμο να διατυπώσουμε ανάλυση όγκου αναφοράς σε δύο διαστάσεις, ειδικά όταν το τοίχωμα έχει πολύ μικρό πάχος και η θερμοκρασία μεταβάλλεται κατά μήκος του τοιχώματος και όχι ως προς το πάχος του.

Κλασικό παράδειγμα η απώλεια θερμότητας μέσω λεπτών πτερυγίων σε συσκευές, όπου η θερμότητα άγεται κατά μήκος των πτερυγίων και αποβάλλεται από την επιφάνεια των πτερυγίων. Η ανάλυση απλοποιείται σημαντικά θεωρώντας ότι η θερμοκρασία του πτερυγίου ως προς το πάχος του είναι ομοιόμορφη.



Σχήμα: Ισοζύγιο θερμότητας σε 2Δ διαφορικό στοιχείο

Ισοζύγιο θερμότητας 2Δ σε διαφορικό στοιχείο λεπτής πλάκας με εμβαδό επιφάνειας $dx dy$ και πάχος a :

$$\rho a c_p \frac{\partial T}{\partial t} = G_1 - J_1 + G_2 - J_2 +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left(k a \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k a \frac{\partial T}{\partial y} \right) +$$

$$+ h_1 (T_{m1} - T) + h_2 (T_{m2} - T) + q'' a$$