Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Προβλήματα Μαρκοβιανών Αλυσίδων

Γιώργος Λυμπερόπουλος

1. Να βρεθούν οι κλάσεις καταστάσεων στις παρακάτω Μαρκοβιανές αλυσίδες και να σημειωθεί αν οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές ή όχι.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

2. Ένας υπολογιστής ελέγχεται στο τέλος κάθε μιας ώρας, όπου διαπιστώνεται αν βρίσκεται σε λειτουργία (κατάσταση 1) ή σε βλάβη (κατάσταση 0). Αν διαπιστωθεί ότι ο υπολογιστής βρίσκεται σε λειτουργία, η πιθανότητα να παραμείνει σε λειτουργία για την επόμενη ώρα είναι 0,9. Αν βρίσκεται σε βλάβη, ο υπολογιστής επιδιορθώνεται. Η διαδικασία επιδιόρθωσης μπορεί να απαιτήσει περισσότερο από μία ώρα. Συγκεκριμένα, οποτεδήποτε ο υπολογιστής βρίσκεται σε βλάβη στο τέλος μιας ώρας, η πιθανότητα να παραμείνει σε βλάβη μια ώρα αργότερα είναι 0,35, ανεξάρτητα από το διάστημα που βρίσκεται σε βλάβη.

1. Να κατασκευασθεί ο πίνακας μετάβασης (ενός βήματος) για αυτήν την Μαρκοβιανή αλυσίδα.
2. Να βρεθεί ο προσδοκώμενος χρόνος πρώτης διάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j, μ_{ij}, για όλα τα i και j.

3. Μια παραγωγική μονάδα έχει μια μηχανή κατεργασίας η οποία, όταν βρίσκεται σε λειτουργία στην αρχή της ημέρας, έχει πιθανότητα 0,1 να πάθει βλάβη κατά την διάρκεια της ημέρας. Όταν συμβεί αυτό, η επισκευή λαμβάνει χώρα την επόμενη ημέρα και τελειώνει στο τέλος της ημέρας.

1. Να μορφοποιηθεί η εξέλιξη της κατάστασης της μηχανής ως μια Μαρκοβιανή αλυσίδα, αναγνωρίζοντας πιθανές καταστάσεις στο τέλος κάθε ημέρας, και στην συνέχεια κατασκευάζοντας τον πίνακα μετάβασης (ενός βήματος).
2. Να βρεθεί ο προσδοκώμενος χρόνος πρώτης διάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j, μ_{ij}, για όλα τα i και j. Να χρησιμοποιηθούν αυτά τα αποτελέσματα για να βρεθεί ο προσδοκώμενος αριθμός πλήρων ημερών όπου η μηχανή θα παραμένει σε λειτουργία πριν από την επόμενη βλάβη και μετά την ολοκλήρωση μιας επισκευής.
3. Έστω ότι έχουν ήδη περάσει 20 ημέρες χωρίς η μηχανή να έχει πάθει βλάβη από την ημέρα που ολοκληρώθηκε η τελευταία επισκευή. Πώς συγκρίνεται ο προσδοκώμενος αριθμός πλήρων ημερών *εφεξής* όπου η μηχανή θα παραμείνει σε λειτουργία πριν από την επόμενη βλάβη με το αντίστοιχο αποτέλεσμα από το ερώτημα 2 όταν η επισκευή έχει μόλις ολοκληρωθεί. Εξηγείστε.

4. Θεωρείστε ξανά το πρόβλημα 3. Έστω ότι η παραγωγική μονάδα κρατάει μία εφεδρική μηχανή η οποία χρησιμοποιείται μόνον όταν η κύρια μηχανή βρίσκεται σε βλάβη. Κατά την διάρκεια μια ημέρας επισκευής, η εφεδρική μηχανή έχει πιθανότητα 0,1 να πάθει βλάβη, οπότε επισκευάζεται την επόμενη ημέρα. Ορίστε ως κατάσταση του συστήματος το ζεύγος (x,y), όπου τα x και y

παίρνουν τις τιμές 1 ή 0 ανάλογα με το αν η κύρια μηχανή (x) ή η εφεδρική μηχανή (y) βρίσκονται σε λειτουργία στο τέλος της ημέρας. Σημειώστε ότι η κατάσταση (0,0) δεν είναι δυνατή.

1. Να κατασκευασθεί ο πίνακας μετάβασης (ενός βήματος) για αυτήν την Μαρκοβιανή αλυσίδα.
2. Να βρεθεί ο προσδοκώμενος χρόνος επανόδου για την κατάσταση (1,0).

5. Ένα εργοστάσιο έχει δύο πανομοιότυπες μηχανές. Στην αρχή κάθε ώρας, κάθε μηχανή μπορεί να είναι είτε σε λειτουργία είτε σε βλάβη. Αν μία μηχανή είναι σε λειτουργία στην αρχή μιας ώρας, η πιθανότητα να είναι σε βλάβη (δηλαδή να έχει χαλάσει) στην αρχή της επόμενης ώρας είναι f. Αν μία μηχανή είναι σε βλάβη στην αρχή μιας ώρας, η πιθανότητα να είναι σε λειτουργία (δηλαδή να έχει επισκευαστεί) στην αρχή της επόμενης ώρας είναι r. Έστω X_n ο αριθμός των μηχανών σε λειτουργία στην αρχή της ώρας n.

1. Σχεδιάστε το διάγραμμα ροής της Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ και γράψτε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης.
2. Για $f = 1/3$ και $r = 1/2$, βρείτε τον προσδοκώμενο αριθμό ωρών μέχρι να βρίσκονται σε βλάβη και οι δύο μηχανές (για πρώτη φορά), αν στην αρχή μία μηχανή είναι σε βλάβη και μία σε λειτουργία.
3. Για $f = 1/3$ και $r = 1/2$, βρείτε την πιθανότητα ο χρόνος πρώτης διάβασης από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 0 να είναι 2 ώρες.

6. Ο καθένας από δύο ηλεκτρικούς λαμπτήρες είναι είτε αναμμένος είτε σβηστός σε μία ημέρα. Την ημέρα n, κάθε λαμπτήρας έχει ανεξάρτητη πιθανότητα να είναι αναμμένος ίση με

$$[1 + \text{αριθμός αναμμένων λαμπτήρων την ημέρα } n - 1] / 4.$$

Για παράδειγμα, αν και οι δύο λαμπτήρες ήταν αναμμένοι την ημέρα $n - 1$, τότε ο καθένας ανεξάρτητα θα είναι αναμμένος την ημέρα n με πιθανότητα ¾.

1. Τι ποσοστό των ημερών είναι αναμμένοι και οι δύο λαμπτήρες;
2. Τι ποσοστό είναι και οι δύο σβηστοί;

7. Ένα σωματίδιο κινείται πάνω σε έναν κύκλο σε σημεία που έχουν σημειωθεί με τους αριθμούς 0, 1, 2, 3 με δεξιόστροφη σειρά. Το σωματίδιο ξεκινάει από το σημείο 0. Σε κάθε βήμα υπάρχει πιθανότητα p να μετακινηθεί σε ένα σημείο προς τα δεξιά (το 0 ακολουθεί το 3) και πιθανότητα $1 - p$ να μετακινηθεί ένα σημείο προς τ' αριστερά. Έστω X_n ($n \geq 0$) η θέση του σωματιδίου στον κύκλο την περίοδο n. Το $\{X_n\}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα.

1. Να βρεθεί ο προσδοκώμενος χρόνος πρώτης διάβασης από την κατάσταση 0 στην κατάσταση 1, από την κατάσταση 0 στην κατάσταση 2 και από την κατάσταση 0 στην κατάσταση 3.
2. Να βρεθούν οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης.

8. Τρία στα τέσσερα φορτηγά στον αυτοκινητόδρομο ακολουθούνται από ένα αυτοκίνητο, ενώ μόνον ένα στα πέντε αυτοκίνητα ακολουθείται από ένα φορτηγό. Τι ποσοστό των οχημάτων στον αυτοκινητόδρομο είναι φορτηγά;

9. Θεωρείστε το παρακάτω πρόβλημα αποθήκευσης αίματος που αντιμετωπίζει ένα νοσοκομείο. Υπάρχει ανάγκη για ένα σπάνιο είδος αίματος, το AB Rh-αρνητικό. Η ζήτηση σε φιάλες του μισού λίτρου για οποιαδήποτε περίοδο τριών ημερών είναι

$$P\{D = 0\} = 0{,}4, \qquad P\{D = 1\} = 0{,}3, \qquad P\{D = 2\} = 0{,}2, \qquad P\{D = 3\} = 0{,}1.$$

Σημειώστε ότι η προσδοκώμενη ζήτηση είναι 1 φιάλη, αφού $E(D) = 0{,}3(1) + 0{,}2(2) + 0{,}1(3) = 1$. Μεταξύ διαδοχικών παραδόσεων μεσολαβούν 3 ημέρες. Το νοσοκομείο προτείνει μια πολιτική σύμφωνα με την οποία δέχεται 1 φιάλη σε κάθε παράδοση και χρησιμοποιεί το παλαιότερο αίμα πρώτα. Αν απαιτείται περισσότερο αίμα απ' όσο υπάρχει διαθέσιμο, γίνεται μια δαπανηρή παράδοση έκτακτης ανάγκης. Το αίμα αχρηστεύεται και πετιέται αν καθίσει στο ράφι περισσότερο από 21 ημέρες. Η κατάσταση του συστήματος ορίζεται να είναι ο αριθμός των διαθέσιμων φιαλών μετά από μία παράδοση. Έτσι, εξαιτίας της πολιτικής του πετάγματος, η μεγαλύτερη δυνατή κατάσταση είναι 7.

1. Να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης (ενός βήματος) της Μαρκοβιανής αλυσίδας.
2. Να βρεθούν οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης της Μαρκοβιανής αλυσίδας.
3. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από το ερώτημα (b) να βρεθεί η πιθανότητα μόνιμης κατάστασης ότι μία φιάλη αίματος θα πρέπει να πεταχτεί κατά την διάρκεια μιας περιόδου 3 ημερών. (Επειδή το παλαιότερο αίμα χρησιμοποιείται πρώτα, μια φιάλη φτάνει τις 21 ημέρες μόνον όταν η κατάσταση ήταν 7 και στην συνέχεια $D = 0$.)
4. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από το ερώτημα 2 να βρεθεί η πιθανότητα μόνιμης κατάστασης ότι μια παράδοση έκτακτης ανάγκης θα απαιτηθεί κατά την διάρκεια μιας περιόδου 3 ημερών μεταξύ των κανονικών παραδόσεων.

10. Θεωρείστε το πρότυπο αποθεμάτων του καταστήματος φωτογραφικών ειδών στην αρχή των σημειώσεων των Μαρκοβιανών αλυσίδων, με τη διαφορά ότι η εβδομαδιαία ζήτηση έχει την ακόλουθη κατανομή:

$$P\{D = 0\} = 1/4, \quad P\{D = 1\} = 1/2, \quad P\{D = 2\} = 1/4, \quad P\{D \geq 3\} = 0.$$

Η πολιτική παραγγελίας εξακολουθεί να είναι (s, S), μόνο που τώρα $s = 1$ και $S = 2$. Υποθέστε ότι υπάρχει μία φωτογραφική μηχανή στο κατάστημα την χρονική στιγμή (το τέλος μίας εβδομάδας) όπου το κατάστημα ξεκινάει να λειτουργεί αυτή την πολιτική.

1. Να βρείτε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος.
2. Να βρείτε την πιθανότητα το κατάστημα να εξακολουθεί να έχει μία φωτογραφική μηχανή μετά από δύο εβδομάδες λειτουργίας της πολιτικής.
3. Να βρείτε τον προσδοκώμενο χρόνο επανόδου (σε εβδομάδες) στην κατάσταση όπου το κατάστημα θα έχει μία φωτογραφική μηχανή.
4. Να βρείτε τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης της Μαρκοβιανής αλυσίδας.
5. Αν υποθέσουμε ότι το κατάστημα πληρώνει κόστος αποθήκευσης για κάθε φωτογραφική μηχανή στο ράφι στο τέλος της εβδομάδας σύμφωνα με τη συνάρτηση $C(0) = 0$, $C(1) = 2$€ και $C(2) = 8$€, να βρείτε το μακροχρόνιο προσδοκώμενο μέσος κόστος διατήρησης αποθέματος ανά εβδομάδα.

11. Θεωρείστε το παράδειγμα αποθεμάτων στις σημειώσεις. Αντί όμως να ακολουθείται η πολιτική παραγγελίας (s, S), χρησιμοποιείται μία πολιτική παραγγελίας (q, Q) που λειτουργεί ως εξής: Αν το απόθεμα στο τέλος κάθε περιόδου είναι μικρότερο από $q = 2$ μονάδες, τότε παραγγέλνονται $Q = 2$ επιπλέον μονάδες. Έστω X_t ο αριθμός των μονάδων αποθέματος στο τέλος της περιόδου t. Υποθέστε ότι οι ζητήσεις που δεν ικανοποιούνται είναι χαμένες πωλήσεις. Το $\{X_n\}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα (υποθέστε ότι $X_0 = 0$). Χρησιμοποιείστε τις τιμές κόστους και την κατανομή της ζήτησης που δόθηκε στο παράδειγμα αποθεμάτων στο υποκεφάλαιο 1.5 των σημειώσεων.

1. Να βρεθούν οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης.
2. Να βρεθεί το μακροχρόνιο προσδοκώμενο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου.

12. Ένα κατάστημα πουλάει ένα συγκεκριμένο μοντέλο σκληρών δίσκων. Έστω D_1, D_2, … η ζήτηση για σκληρούς δίσκους την $1^{η}$, $2^{η}$, … εβδομάδα. Τα D_t, $t = 1, 2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και πανομοιότυπα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές που μπορούν να πάρουν τις τιμές 0, 1, 2, 3, με ίση πιθανότητα. Έστω X_0 το απόθεμα / έλλειμμα των σκληρών δίσκων στον χρόνο μηδέν, και X_1, X_2,… το απόθεμα / έλλειμμα των σκληρών δίσκων στο τέλος της $1^{ης}$, $2^{ης}$, … εβδομάδας (το X_t υποδηλώνει απόθεμα, όταν είναι θετικό, και έλλειμμα, όταν είναι αρνητικό, και η διαδικασία $\{X_t, t = 0, 1, 2, \ldots\}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα). Στο τέλος της εβδομάδας t, το κατάστημα παραγγέλνει $S - X_t$ σκληρούς δίσκους από τον προμηθευτή, όπου $S = 2$. Οι παραγγελία αυτή καταφθάνει στο κατάστημα στην αρχή της επόμενης εβδομάδας. Συνεπώς, το απόθεμα / έλλειμμα στο τέλος της εβδομάδας $t + 1$ δίνεται από τον τύπο:

$$X_{t+1} = X_t + S - X_t - D_{t+1} = S - D_{t+1}.$$

Τα μοναδικά κόστη που αντιμετωπίζει το κατάστημα είναι το κόστος αποθέματος, που ανέρχεται στο 1 € ανά εβδομάδα ανά σκληρό δίσκο, και το κόστος ελλείμματος, που υπολογίζεται στα 9 € ανά εβδομάδα ανά ελλειμματική μονάδα. Να βρεθούν:

1. Ο πίνακας μετάβασης ενός βήματος της Μαρκοβιανής αλυσίδας.
2. Ο προσδοκώμενος χρόνος (σε εβδομάδες) μέχρι να μηδενιστεί το απόθεμα σκληρών δίσκων, όταν αρχικά υπάρχει ένας (1) σκληρός δίσκος.
3. Το μέσο απόθεμα και το μέσο έλλειμμα των δίσκων.
4. Το μακροχρόνιο προσδοκώμενο μέσο κόστος ανά εβδομάδα.

13. Θεωρείστε την παρακάτω πολιτική αποθεμάτων (k, Q). Έστω D_1, D_2,… η ζήτηση για ένα προϊόν τις περιόδους 1, 2,…, αντίστοιχα. Αν η ζήτηση σε μία περίοδο ξεπερνάει τον αριθμό των διαθέσιμων προϊόντων, η ανικανοποίητη αυτή ζήτηση μπαίνει σε αναμονή, δηλαδή ικανοποιείται όταν παραληφθεί η επόμενη παραγγελία. Έστω Z_n ($n = 0, 1, \ldots$) η ποσότητα του διαθέσιμου αποθέματος μείον του αριθμού των παραγγελιών σε αναμονή πριν γίνει παραγγελία στο τέλος της περιόδου n ($Z_0 = 0$). Αν το Z_n είναι μηδέν ή θετικό, δεν υπάρχουν παραγγελίες σε αναμονή. Αν το Z_n είναι αρνητικό, τότε το $-Z_n$ εκφράζει τον αριθμό των παραγγελιών σε αναμονή και δεν υπάρχει καθόλου διαθέσιμο απόθεμα. Στο τέλος της περιόδου n, αν $Z_n < k = 1$, δίνεται μια παραγγελία για $2m$ (Qm, γενικά) μονάδες, όπου το m είναι ο μικρότερος ακέραιος τέτοιος ώστε $Z_n + 2m \geq 1$. Οι παραγγελίες ικανοποιούνται αμέσως. Έστω ότι οι ζητήσεις D_n είναι ανεξάρτητες και πανομοιότυπα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές που παίρνουν τις τιμές 0, 1, 2, 3, 4, κάθε μία με πιθανότητα 1/5. Έστω X_n η ποσότητα του διαθέσιμου αποθέματος μετά την παραγγελία στο τέλος της περιόδου n (όπου $X_0 = 2$), ώστε

$$X_n = \begin{cases} X_{n-1} - D_n + 2m & \text{αν } X_{n-1} - D_n < 1 \\ X_{n-1} - D_n & \text{αν } X_{n-1} - D_n \geq 1 \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

όπου το $\{X_n\}$ ($n = 0, 1, \ldots$) είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα. Έχει μόνον δύο καταστάσεις, τις 1 και 2, γιατί μια παραγγελία θα δοθεί μόνον όταν $Z_n = 0, -1, -2$, ή -3, οπότε παραγγέλνονται 2, 2, 4 και 4 μονάδες, αντίστοιχα, αφήνοντας το $X_n = 2, 1, 2, 1$, αντίστοιχα. (Γενικά για οποιαδήποτε πολιτική (k, Q), οι πιθανές καταστάσεις είναι $k, k + 1, k + 2, \ldots, k + Q - 1$.)

1. Να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης (ενός βήματος).
2. Να βρεθούν οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης.
3. Έστω ότι το κόστος παραγγελίας είναι $2 + 2m$ αν δοθεί μια παραγγελία, διαφορετικά είναι 0. Το κόστος διατήρησης αποθέματος ανά περίοδο είναι Z_n αν $Z_n \geq 0$, διαφορετικά είναι 0. Το κόστος ελλείμματος ανά περίοδο είναι $-4Z_n$ αν $Z_n < 0$, διαφορετικά είναι 0. Να βρεθεί το (μακροχρόνιο) προσδοκώμενο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου.

14. 3 άσπρες και 2 μαύρες μπάλες είναι κατανεμημένες σε δύο δοχεία, A και B, με τέτοιο τρόπο ώστε το δοχείο A να περιέχει 2 μπάλες και το δοχείο B να περιέχει 3 μπάλες. Λέμε ότι το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i, i = 0, 1, 2, αν το δοχείο A περιέχει i μαύρες μπάλες. Σε κάθε βήμα (περίοδο) τραβάμε τυχαία μία μπάλα από κάθε δοχείο και τις αντικαθιστούμε αμοιβαία, δηλαδή τοποθετούμε την μπάλα που τραβήξαμε από το δοχείο A στο δοχείο B και την μπάλα που τραβήξαμε από το δοχείο B στο δοχείο A. Έστω X_n η κατάσταση του συστήματος μετά το n-στό βήμα.

1. Σχεδιάστε το διάγραμμα ροής της Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ και γράψτε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης.
2. Βρείτε τον προσδοκώμενο χρόνο (αριθμό βημάτων) μέχρι να αδειάσει το δοχείο A από όλες τις μαύρες μπάλες δεδομένου ότι στην αρχή έχει 2 μαύρες μπάλες.

15. Θεωρείστε το παρακάτω πρότυπο κίνησης μορίων. M μόρια είναι κατανεμημένα σε δύο δοχεία, A και B, Λέμε ότι το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i, $i = 0, 1,\ldots, M$, αν το δοχείο A περιέχει i μόρια (και συνεπώς το δοχείο B περιέχει $M - i$ μόρια). Σε κάθε βήμα (περίοδο), επιλέγεται τυχαία ένα μόριο, εξάγεται από το δοχείο όπου βρίσκεται και εισάγεται στο άλλο δοχείο.

1. Σχεδιάστε το διάγραμμα ροής της Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$.
2. Για $M = 3$: (α) σχεδιάστε το διάγραμμα ροής της Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ και γράψτε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης, (β) βρείτε τον προσδοκώμενο χρόνο (αριθμό βημάτων) μέχρι να αδειάσει το δοχείο A από όλα τα μόρια, δεδομένου ότι αρχικά έχει 2 μόρια, (γ) βρείτε τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης της Μαρκοβιανής Αλυσίδας, και (δ) αν κάθε φορά που γίνεται μια μετάβαση ενός μορίου από το δοχείο A στο δοχείο B χάνεται 1 θερμίδα, ενώ κάθε φορά που γίνεται μια μετάβαση ενός μορίου από το δοχείο B στο A χάνονται δύο θερμίδες, βρείτε τον προσδοκώμενο μέσο αριθμό θερμίδων που χάνονται ανά περίοδο;

16. Κάθε απόγευμα, ένας φοιτητής βγαίνει από το σπίτι του για τρέξιμο. Μία στις τρείς φορές βγαίνει από την μπροστινή πόρτα ενώ δύο στις τρείς φορές βγαίνει από την πίσω πόρτα. Πριν ξεκινήσει για τρέξιμο, διαλέγει ένα ζευγάρι αθλητικά παπούτσια από την είσοδο της πόρτας που βγήκε, ή φεύγει για τρέξιμο ξυπόλυτος αν δεν βρει παπούτσια στην είσοδο της πόρτας από όπου φεύγει. Κατά την επιστροφή του, είναι εξίσου πιθανό να μπει στο σπίτι, και να αφήσει τα παπούτσια του, είτε από την μπροστινή είτε από την πίσω πόρτα. Αν έχει συνολικά 3 ζευγάρια παπούτσια, τι ποσοστό του χρόνου τρέχει ξυπόλυτος;

17. Θεωρείστε το παρακάτω πρότυπο της εξέλιξης ενός τυχερού παιχνιδιού. Δύο παίκτες, A και B, έχουν συνολική περιουσία M ευρώ. Λέμε ότι το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i, $i = 0, 1,\ldots, M$, αν ο παίκτης A έχει περιουσία i ευρώ (και συνεπώς ο παίκτης B έχει περιουσία $M - i$ ευρώ). Σε κάθε βήμα (περίοδο), οι δύο παίκτες παίζουν το τυχερό παιχνίδι, και το κερδίζει ο παίκτης A με πιθανότητα i/M.

1. Σχεδιάστε το διάγραμμα ροής της Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$.
2. Για $M = 3$: (α) σχεδιάστε το διάγραμμα ροής της Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ και γράψτε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης, (β) βρείτε την πιθανότητα να χρεωκοπήσει ο παίκτης A (δηλαδή να απορροφηθεί στην κατάσταση 0), δεδομένου ότι αρχικά έχει περιουσία 1 ευρώ, και βρείτε την πιθανότητα να χρεωκοπήσει ο παίκτης A, δεδομένου ότι αρχικά έχει περιουσία 2 ευρώ.

18. Ένας κατασκευαστής σκληρών δίσκων είναι τόσο σίγουρος για το έλεγχο ποιότητάς του που προσφέρει συμβόλαιο εγγύησης πλήρους αντικατάστασης αν ένας σκληρός δίσκος του αστοχήσει μέσα σε 2 έτη. Με βάση ιστορικά δεδομένα, ο κατασκευαστής γνωρίζει ότι μόνον 1% των δίσκων του αστοχούν κατά το 1^{ο} έτος λειτουργίας τους, ενώ 5% των δίσκων που επιβιώνουν το 1^{ο} έτος λειτουργίας τους αστοχούν κατά το 2^{ο} έτος λειτουργίας τους. Το συμβόλαιο εγγύησης δεν καλύπτει τους δίσκους που έχουν αντικατασταθεί.

1. Μορφοποιείστε την εξέλιξη της κατάστασης ενός δίσκου ως μια Μαρκοβιανή αλυσίδα της οποίας οι καταστάσεις συμπεριλαμβάνουν 2 απορροφητικές καταστάσεις: η μία είναι η κατάσταση όπου ο κατασκευαστής θα πρέπει να τιμήσει το συμβόλαιο εγγύησης και η άλλη είναι η κατάσταση όπου ο δίσκος θα επιβιώσει την περίοδο που καλύπτει η εγγύηση. Στην συνέχεια, κατασκευάστε το διάγραμμα ροής και τον πίνακα μετάβασης ενός βήματος της Μαρκοβιανής αλυσίδας.
2. Βρείτε την πιθανότητα ότι ο κατασκευαστής θα πρέπει να τιμήσει το συμβόλαιο εγγύησης.

19. Ένας εμπορικός αντιπρόσωπος έχει πελάτες σε τρεις πόλεις 1, 2 και 3. Αν μια μέρα ο αντιπρόσωπος βρίσκεται στην πόλη 1, τότε την επόμενη μέρα είναι εξ ίσου πιθανό να παραμείνει στην πόλη 1 ή να φύγει, οπότε επιλέγει τυχαία μία από τις πόλεις 2 και 3. Αν όμως μια ημέρα ο αντιπρόσωπος βρίσκεται στην πόλη 2 ή 3, τότε την επόμενη μέρα φεύγει οπωσδήποτε και πηγαίνει στην πόλη 1 με διπλάσια πιθανότητα απ' ότι στην άλλη πόλη. Η πορεία του αντιπροσώπου μεταξύ των πόλεων 1, 2 και 3 μπορεί να περιγραφεί με την βοήθεια μίας Μαρκοβιανής αλυσίδας. Έστω X_n η πόλη στην οποία βρίσκεται ο αντιπρόσωπος την n-οστή ημέρα, όπου $n = 0, 1, 2, \ldots$.

1. Γράψτε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης της Μαρκοβιανής αλυσίδας.
2. Βρείτε τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης της Μαρκοβιανής αλυσίδας.
3. Βρείτε το μέσο κόστος μεταφοράς ανά ημέρα του αντιπροσώπου, όταν το κόστος μεταφοράς από την πόλη i στην πόλη j δίνεται από τον πίνακα

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

20. Μια βιομηχανία σαπουνιών ειδικεύεται σε ένα ειδικό τύπο σαπουνιού πολυτελείας. Οι πωλήσεις για αυτό το σαπούνι κυμαίνονται μεταξύ δύο επιπέδων – χαμηλού και υψηλού – ανάλογα με το αν το σαπούνι διαφημίστηκε ή όχι. Η βιομηχανία θέλει να καθορίσει ποια πρέπει να είναι η διαφημιστική στρατηγική της όσον αφορά το συγκεκριμένο σαπούνι. Η πρόταση του διευθυντή μάρκετινγκ είναι να γίνεται διαφήμιση όταν οι πωλήσεις είναι χαμηλές και να μην γίνεται διαφήμιση όταν οι πωλήσεις είναι υψηλές. Η διαφήμιση που γίνεται σε οποιοδήποτε τρίμηνο του έτους επηρεάζει κατά κύριο λόγο τις πωλήσεις του επόμενου τριμήνου. Έτσι, στην αρχή κάθε τριμήνου, είναι διαθέσιμες όλες οι πληροφορίες για να προβλεφθεί με ακρίβεια αν οι πωλήσεις θα είναι χαμηλές ή υψηλές εκείνο το τρίμηνο και για να αποφασισθεί αν θα γίνει διαφήμιση εκείνο το τρίμηνο.

Το κόστος διαφήμισης είναι €1 εκ. για κάθε τρίμηνο του χρόνου στο οποίο γίνεται διαφήμιση. Όταν σε ένα τρίμηνο γίνεται διαφήμιση, η πιθανότητα οι πωλήσεις να είναι υψηλές το επόμενο τρίμηνο είναι ½ ή ¾, ανάλογα με το αν οι πωλήσεις του τρέχοντος τριμήνου είναι χαμηλές ή υψηλές, αντίστοιχα. Οι πιθανότητες αυτές πέφτουν στα ¼ και ½, αντίστοιχα, όταν δεν γίνεται διαφήμιση στο τρέχον τρίμηνο. Τα κέρδη τριμήνου της βιομηχανίας (χωρίς να συμπεριλαμβάνονται τα κόστη διαφήμισης) είναι €4 εκ. όταν οι πωλήσεις είναι υψηλές και €2 εκ. όταν οι πωλήσεις είναι χαμηλές (χρησιμοποιείστε μονάδες σε εκ. €).

1. Κατασκευάστε τον πίνακα μετάβασης (ενός βήματος) για κάθε μία από τις παρακάτω στρατηγικές διαφήμισης: 1) Ποτέ να μην γίνεται διαφήμιση, 2) πάντα να γίνεται διαφήμιση, και 3) να ακολουθείται η πρόταση του διευθυντή μάρκετινγκ.
2. Βρείτε τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης για κάθε μία από τις τρεις περιπτώσεις του ερωτήματος 1.
3. Βρείτε το μακροπρόθεσμο προσδοκώμενο μέσο κέρδος (μετά την αφαίρεση του κόστους διαφήμισης) ανά τρίμηνο για κάθε μία από τις τρεις στρατηγικές διαφήμισης του ερωτήματος 1. Ποια από αυτές τις στρατηγικές είναι η καλύτερη όσον αφορά αυτό το μέτρο απόδοσης;

21. Θεωρείστε το παράδειγμα που παρουσιάστηκε στο τέλος του υποκεφαλαίου 1.7 των σημειώσεων πάνω στις Μαρκοβιανές αλυσίδες. Υποθέστε τώρα ότι μια τρίτη μηχανή, πανομοιότυπη με τις δύο πρώτες, προστίθεται στο μηχανουργείο. Ο μοναδικός τεχνίτης επισκευής πρέπει να επισκευάζει και τις τρεις μηχανές.

1. Να αναπτυχθεί το διάγραμμα ροής για αυτήν την Μαρκοβιανή αλυσίδα.
2. Να γραφτούν οι εξισώσεις μόνιμης κατάστασης.
3. Να λυθούν οι εξισώσεις μόνιμης κατάστασης για να βρεθούν οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης.

22. Η κατάσταση μιας συγκεκριμένης Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου ορίζεται ως ο αριθμός των εργασιών που βρίσκονται σε έναν συγκεκριμένο σταθμό εργασίας, όπου ο μέγιστος επιτρεπτός αριθμός των εργασιών είναι τρεις εργασίες. Οι εργασίες καταφτάνουν στον σταθμό μία-μία. Οποτεδήποτε υπάρχουν λιγότερες από τρεις εργασίες, ο χρόνος μέχρι την επόμενη άφιξη έχει εκθετική κατανομή με μέση τιμή ½ ημέρα. Οι εργασίες λαμβάνουν επεξεργασία στον σταθμό μία-μία και στην συνέχεια αποχωρούν αμέσως. Οι χρόνοι επεξεργασίας έχουν εκθετική κατανομή με μέση τιμή ¼ ημέρα.

1. Να αναπτυχθεί το διάγραμμα ροής για αυτήν την Μαρκοβιανή αλυσίδα.
2. Να γραφτούν οι εξισώσεις μόνιμης κατάστασης.
3. Να λυθούν οι εξισώσεις μόνιμης κατάστασης για να βρεθούν οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης.

23. Θεωρείστε ένα σύστημα ουράς αναμονής με έναν σταθμό εξυπηρέτησης στον οποίο οι πελάτες καταφθάνουν σύμφωνα με μία διαδικασία εισόδου Poisson με παράμετρο λ (δείτε το Κεφάλαιο 8.6 του βιβλίου), και οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές όλες με την ίδια κατανομή. Για $n = 1, 2, \ldots$, έστω X_n ο αριθμός των πελατών στο σύστημα τη στιγμή t_n που έχει μόλις τελειώσει η εξυπηρέτηση του n-στού πελάτη. Η αλληλουχία των χρόνων $\{t_n\}$ που αντιστοιχούν στις στιγμές όπου διαδοχικοί πελάτες αναχωρούν από το σταθμό εξυπηρέτησης ονομάζονται *σημεία αναγέννησης*. Επιπλέον, η $\{X_n\}$, που αναπαριστάνει των αριθμό των πελατών στο σύστημα στην αντίστοιχη αλληλουχία χρόνων $\{t_n\}$, είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα και είναι γνωστή ως *εμπεδωμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα*. Οι εμπεδωμένες Μαρκοβιανές αλυσίδες είναι χρήσιμες για την μελέτη των ιδιοτήτων στοχαστικών διαδικασιών με παραμέτρους συνεχούς χρόνου.

Τώρα θεωρείστε την συγκεκριμένη ειδική περίπτωση όπου ο χρόνος εξυπηρέτησης διαδοχικών πελατών είναι σταθερός, ας πούμε 10 λεπτά, και ο μέσος ρυθμός αφίξεων είναι μια άφιξη κάθε 50 λεπτά. Για να υπάρχει ένας *πεπερασμένος* αριθμό καταστάσεων, υποθέστε ως προσέγγιση, ότι αν υπάρχουν πάνω από τέσσερις πελάτες στο σύστημα, το σύστημα γίνεται κεκορεσμένο έτσι ώστε επιπλέον αφίξεις να διώχνονται. Έτσι, η $\{X_n\}$ είναι μία εμπεδωμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα με καταστάσεις τις 0, 1, 2, και 3. (Επειδή δεν υπάρχουν ποτέ περισσότεροι από τέσσερις πελάτες στο σύστημα, δεν μπορεί ποτέ να υπάρχουν περισσότεροι από τρεις πελάτες στο σύστημα σε ένα σημείο αναγέννησης.) Επειδή το σύστημα παρατηρείται σε διαδοχικές αποχωρήσεις πελατών, το X_n δεν μπορεί ποτέ να μειωθεί περισσότερο από 1 σε κάθε μετάβαση. Επιπλέον, οι πιθανότητες μετάβασης που έχουν σαν αποτέλεσμα αύξηση του X_n λαμβάνονται κατευθείαν από την κατανομή Poisson.

1. Να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης ενός βήματος (Για να βρείτε την πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση 3 στην κατάσταση 3, χρησιμοποιείστε την πιθανότητα μιας ή περισσότερων αφίξεων αντί για μια μόνο άφιξη, και παρόμοια για άλλες μεταβάσεις στην κατάσταση 3.)
2. Να βρεθούν οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης για τον αριθμό των πελατών στο σύστημα στα σημεία αναγέννησης.
3. Να υπολογισθεί ο προσδοκώμενος αριθμός των πελατών στο σύστημα ουράς στα σημεία αναγέννησης, και να συγκριθεί με την τιμή του L στο πρότυπο με ένα σταθμό εξυπηρέτησης στο κεφάλαιο 8.7.