Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο Θ Ε Σ Σ Α Λ Ι Α Σ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

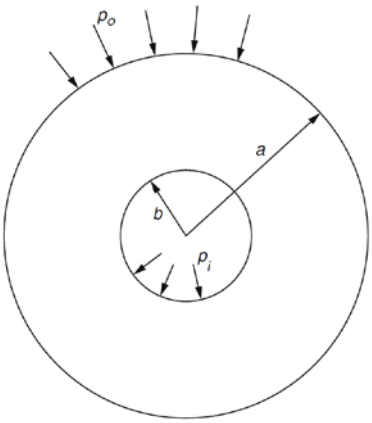
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΟΧΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
Λεωφόρος Αθηνών
Πεδίον Άρεως
38334 Βόλος

Διευθυντής: Καθηγητής Ν. Αράβας
Τηλ.: 2421-074 002
FAX: 2421-074 009
e-mail: aravas@uth.gr

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΙΙ

Σειρά Ασκήσεων 4

Πρόβλημα 1



Θεωρούμε το επίπεδο πρόβλημα ενός σωλήνα (επίπεδη παραμόρφωση) ή ενός κυκλικού δίσκου με κυκλική οπή στο κέντρο του (επίπεδη ένταση), όπως φαίνεται στο σχήμα. Η εξωτερική και εσωτερική ακτίνα έχουν μήκος a και b και η εξωτερική και εσωτερική πίεση είναι p_o και p_i.

α) Να υπολογιστούν οι σταθερές A και B, ώστε η συνάρτηση $f(r) = A\ln r + \frac{B}{2}r^2$ να είναι η τασεοσυνάρτηση Airy του προβλήματος.

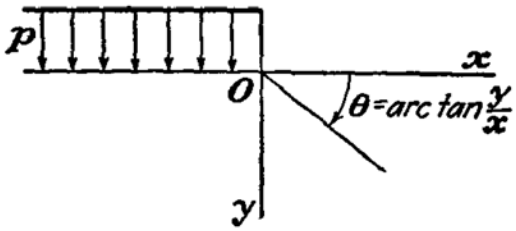
β) Να υπολογιστεί το πεδίο των τάσεων στο σώμα.

Απάντηση

α) $A = -\frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2}(p_i - p_o)$, $\quad B = \frac{p_i b^2 - p_o a^2}{a^2 - b^2}$,

β) $\sigma_{rr} = \frac{A}{r^2} + B$, $\quad \sigma_{\theta\theta} = -\frac{A}{r^2} + B$, $\quad \sigma_{r\theta} = 0$.

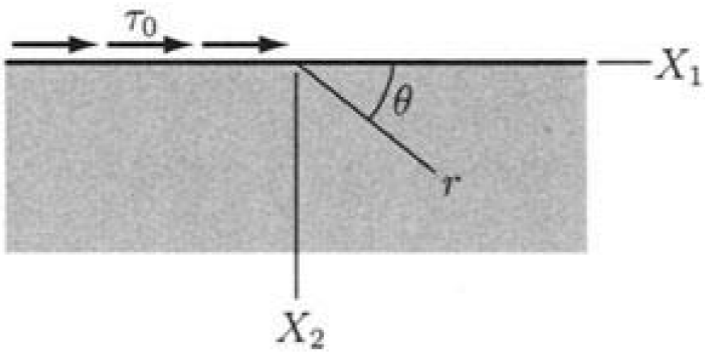
Πρόβλημα 2



Θεωρούμε το επίπεδο πρόβλημα του ημιάπειρου χώρου $y \geq 0$, ο οποίος φορτίζεται με ομοιόμορφη πίεση p στο μέρος του συνόρου $(y = 0, x < 0)$. Να υπολογιστεί η σταθερά A, ώστε η συνάρτηση $f(r,\theta) = A\,p\,r^2\left(\frac{\sin 2\theta}{2} - \theta\right)$ να είναι η τασεοσυνάρτηση Airy του προβλήματος.

Απάντηση $\quad A = \frac{1}{2\pi}$.

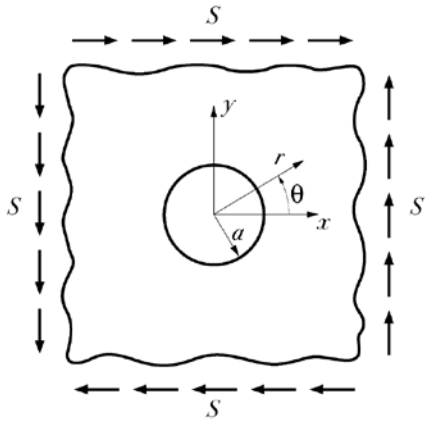
Πρόβλημα 3



Θεωρούμε το επίπεδο πρόβλημα του ημιάπειρου χώρου $X_2 \geq 0$, ο οποίος φορτίζεται με ομοιόμορφη διατμητική τάση τ_0 στο μέρος του συνόρου $\left(X_2 = 0, X_1 < 0\right)$. Να υπολογιστεί η σταθερά A, ώστε η συνάρτηση $f\left(r,\theta\right) = A\tau_0 r^2\left[\left(\ln r - 1\right)\sin^2\theta + \frac{\theta \sin 2\theta}{2}\right]$ να είναι η τασεοσυνάρτηση Airy του προβλήματος.

Απάντηση $A = \frac{1}{\pi}$.

Πρόβλημα 4



Θεωρούμε το πρόβλημα του "άπειρου" ελάσματος με κυκλική οπή ακτίνας a. Το έλασμα φορτίζεται στο "άπειρο" με διατμητρική τάση S.

α) Να υπολογιστεί η αδιάστατη συνάρτηση $g\left(r\right)$, ώστε η συνάρτηση $f\left(r,\theta\right) = S\,a^2 g\left(r\right)\sin 2\theta$ να είναι η τασεοσυνάρτηση Airy του προβλήματος.

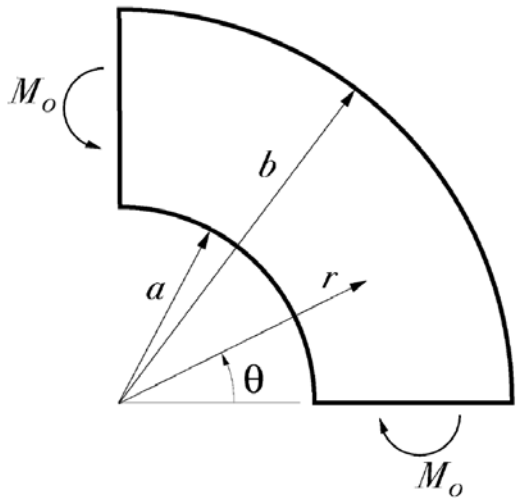
β) Να υπολογιστεί το πεδίο των τάσεων στο σώμα.

Απάντηση

α) $f\left(r,\theta\right) = S\,a^2\left(1 - \frac{a^2}{2r^2} - \frac{r^2}{2a^2}\right)\sin 2\theta$,

β) $\sigma_{rr} = S\left(1 - 4\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4}\right)\sin 2\theta$, $\quad \sigma_{\theta\theta} = -S\left(1 + 3\frac{a^4}{r^4}\right)\sin 2\theta$, $\quad \sigma_{r\theta} = S\left(1 + 2\frac{a^2}{r^2} - 3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$.

Πρόβλημα 5

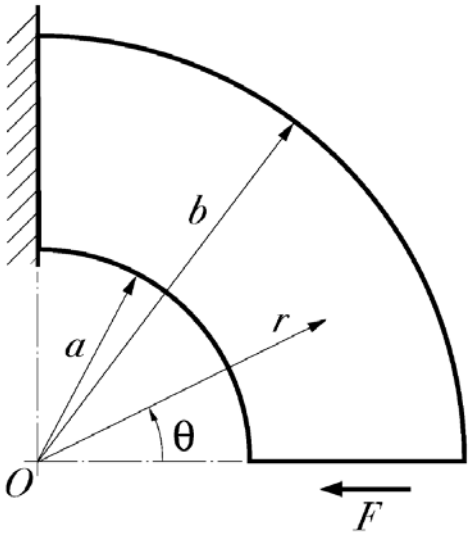


Θεωρούμε το πρόβλημα της καμπύλης δοκού που φορτίζεται σε καθαρή κάμψη με ροπή M_0. Να υπολογιστούν οι σταθερές (A,B,C), ώστε η συνάρτηση $f(r)=M_0\left(A\frac{r^2}{a^2}+B\frac{r^2}{a^2}\ln\frac{r}{a}+C\ln\frac{r}{a}\right)$ να είναι η τασεοσυνάρτηση Airy του προβλήματος.

Απάντηση

$$A=-\frac{1}{\Pi}\left(\frac{b^2}{a^2}-1+2\frac{b^2}{a^2}\ln\frac{b}{a}\right),\quad B=\frac{2}{\Pi}\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right),\quad C=\frac{4}{\Pi}\frac{b^2}{a^2}\ln\frac{b}{a},\quad \Pi=\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)^2-4\frac{b^2}{a^2}\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2.$$

Πρόβλημα 6

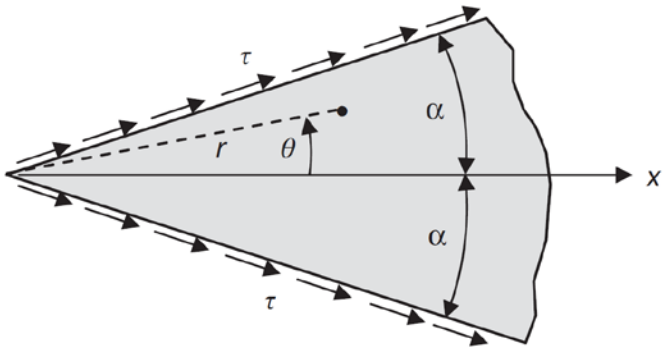


Θεωρούμε το πρόβλημα της καμπύλης δοκού που φορτίζεται σε κάμψη με τέμνουσα δύναμη F. Να υπολογιστούν οι σταθερές (A,B,C), ώστε η συνάρτηση $f(r)=F\,a\left(A\frac{r^3}{a^3}+B\frac{a}{r}+C\frac{r}{a}\ln\frac{r}{a}\right)$ να είναι η τασεοσυνάρτηση Airy του προβλήματος.

Απάντηση

$$A=-\frac{1}{2\Pi},\qquad B=\frac{b^2}{2a^2}\frac{1}{\Pi},\qquad C=\left(\frac{b^2}{a^2}+1\right)\frac{1}{\Pi},\qquad \Pi=\frac{b^2}{a^2}-1-\left(\frac{b^2}{a^2}+1\right)\ln\frac{b}{a}.$$

Πρόβλημα 7



Θεωρούμε το επίπεδο πρόβλημα της "άπειρης" σφήνας, οι επιφάνειες της οποίας φορτίζονται με ομοιόμορφη διατμητική τάση τ.

α) Να υπολογιστεί ο εκθέτης m και η συνάρτηση $g(\theta)$, ώστε η συνάρτηση $f(r,\theta)=\tau r^m g(\theta)$ να είναι η τασεοσυνάρτηση Airy του προβλήματος.

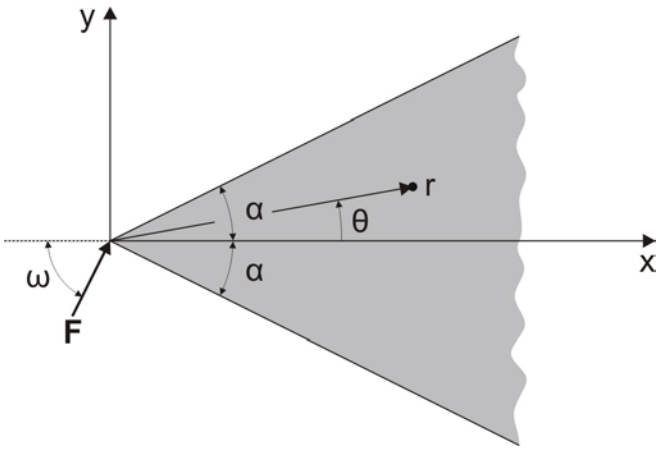
β) Να υπολογιστεί το πεδίο των τάσεων στο σώμα.

Απάντηση

α) $m=2$, $\quad g(\theta)=\dfrac{\cos 2\theta-\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha}$,

β) $\sigma_{rr}=-\tau\dfrac{\cos 2\theta+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$, $\quad \sigma_{\theta\theta}=\tau\dfrac{\cos 2\theta-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$, $\quad \sigma_{r\theta}=\tau\dfrac{\sin 2\theta}{\sin 2\alpha}$.

Πρόβλημα 8



Θεωρούμε το επίπεδο πρόβλημα της "άπειρης" σφήνας, η ακμή της οποίας φορτίζεται με συγκεντρωμένο φορτίο P, το οποίο σχηματίζει γωνία ω με τον άξονα συμμετρίας.

α) Να υπολογιστεί ο εκθέτης m και η συνάρτηση $g(\theta)$, ώστε η συνάρτηση $f(\theta)=P r^m g(\theta)$ να είναι η τασεοσυνάρτηση Airy του προβλήματος.

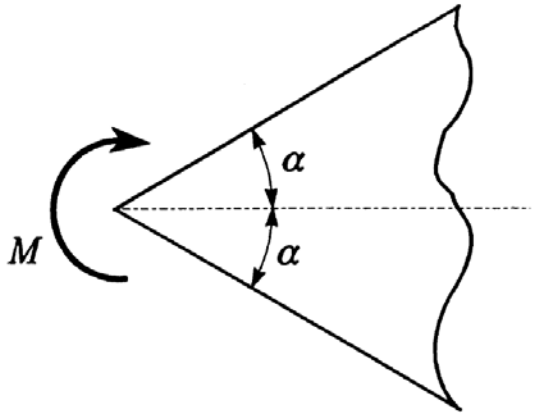
β) Να υπολογιστεί το πεδίο των τάσεων στο σώμα.

Απάντηση

α) $m=1$, $\quad f(r,\theta)=-P r\theta\dfrac{2\alpha\sin(\theta-\omega)-\sin 2\alpha\sin(\theta+\omega)}{(2\alpha+\sin 2\alpha)(2\alpha-\sin 2\alpha)}$,

β) $\sigma_{rr}=-\dfrac{2P}{r}\dfrac{2\alpha\cos(\theta-\omega)-\sin 2\alpha\cos(\theta+\omega)}{(2\alpha+\sin 2\alpha)(2\alpha-\sin 2\alpha)}$, $\quad \sigma_{\theta\theta}=\sigma_{r\theta}=0$.

Πρόβλημα 9



Θεωρούμε το επίπεδο πρόβλημα της "άπειρης" σφήνας, η ακμή της οποίας φορτίζεται με συγκεντρωμένη ροπή M.

α) Να υπολογιστεί ο εκθέτης m και η αδιάστατη συνάρτηση $g(\theta)$, ώστε η συνάρτηση $f(\theta) = M\, r^m\, g(\theta)$ να είναι η τασεοσυνάρτηση Airy του προβλήματος. Η γωνία θ μετράται αντιωρολογιακά από τον άξονα συμμετρίας της σφήνας.

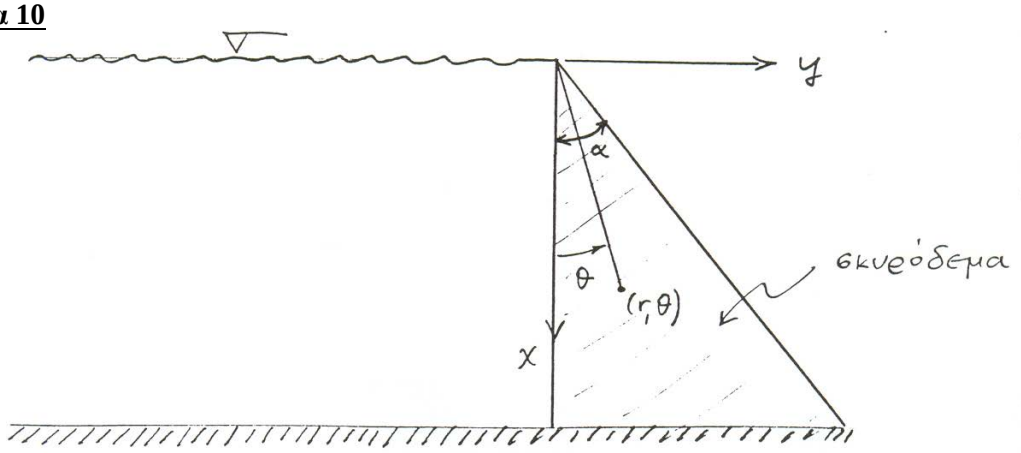
β) Να υπολογιστεί το πεδίο των τάσεων στο σώμα.

Απάντηση

α) $m = 0$, $\quad g(\theta) = \dfrac{c}{2}\left(2\theta\cos 2\alpha - \sin 2\theta\right)$, $\quad c = \dfrac{1}{2\alpha\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}$,

β) $\sigma_{rr} = 2M\, c\dfrac{\sin 2\theta}{r^2}$, $\quad \sigma_{\theta\theta} = 0$, $\quad \sigma_{r\theta} = M\, c\dfrac{\cos 2\alpha - \cos 2\theta}{r^2}$.

Πρόβλημα 10



Το φράγμα του σχήματος είναι κατασκευασμένο από σκυρόδεμα και υπόκειται σε υδροστατική πίεση $p = \rho\, g\, x$, όπου ρ είναι η πυκνότητα μάζας του νερού, g η επιτάχυνση βαρύτητας και x η κατακόρυφη απόσταση από την ελεύθερη επιφάνεια. Επίσης το φράγμα υπόκειται το βάρος του και η πυκνότητα μάζας του σκυροδέματος είναι ρ_c.

α) Να υπολογιστεί ο εκθέτης n και η αδιάστατη συνάρτηση $F(\theta)$ ώστε η συνάρτηση

$$f(r,\theta) = \rho\, g\, r^n\, F(\theta)$$

να είναι η τασεοσυνάρτηση Airy του προβλήματος. Υπενθυμίζεται ότι η συνάρτηση δυναμικού από την οποία προκύπτει η μαζική δύναμη του σκυροδέματος είναι $V = -\rho_c\, g\, x = -\rho_c\, g\, r\cos\theta$.

β) Εάν $\zeta \equiv \dfrac{\rho_c}{\rho} = 2.3$, να υπολογιστεί η ελάχιστη τιμή της γωνίας α για την οποία τάση σ_{xx} στο κατακόρυφο τοίχωμα του φράγματος παραμένει θλιπτική.

Απάντηση

α) $f\left(r,\theta\right)=\rho\, g\, r^3\left(A\cos 3\theta + B\sin 3\theta + C\cos\theta + D\sin\theta\right)$,

$$A=\frac{1}{8}\left(\frac{\zeta-1}{3}-\cot^2\alpha\right),\quad B=\frac{\cot\alpha}{24}\left(2\cot^2\alpha-\zeta\right),\quad C=\frac{1}{8}\left(\zeta-1+\cot^2\alpha\right),\quad D=-3B.$$

β) $\alpha \geq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\zeta}}\right)=33,4^\circ$.