Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο  Θ Ε Σ Σ Α Λ Ι Α Σ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

**ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΟΧΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ**

Λεωφόρος Αθηνών
Πεδίον Άρεως
38334 Βόλος

Διευθυντής: Καθηγητής Ν. Αράβας
Τηλ.: 2421-074 002
FAX: 2421-074 009
e-mail: aravas@uth.gr

**ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ Ι**
Σειρά Ασκήσεων 3

**Πρόβλημα 1**

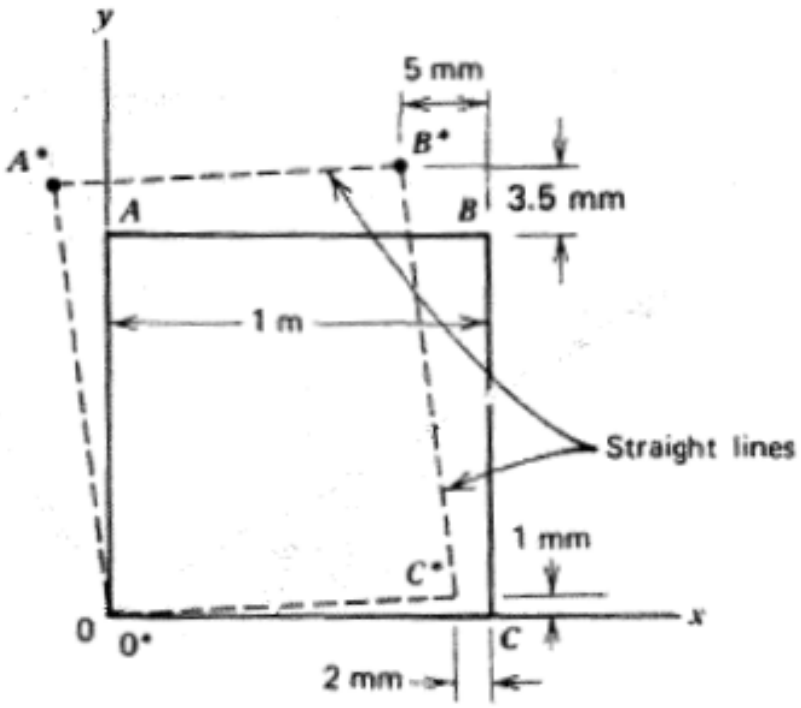
Το πεδίο των μετατοπίσεων στην τετράγωνη πλάκα του σχήματος έχει τη μορφή

$$u_x = a_1 + b_1 x + c_1 y\,, \qquad u_y = a_2 + b_2 x + c_2 y\,, \qquad u_z = 0\,.$$

a) Να υπολογιστεί το πεδίο του τανυστή των απειροστών παραμορφώσεων στην πλάκα.

b) Να υπολογιστεί η μεταβολή της αρχικά ορθής γωνίας $\widehat{ABC}$.

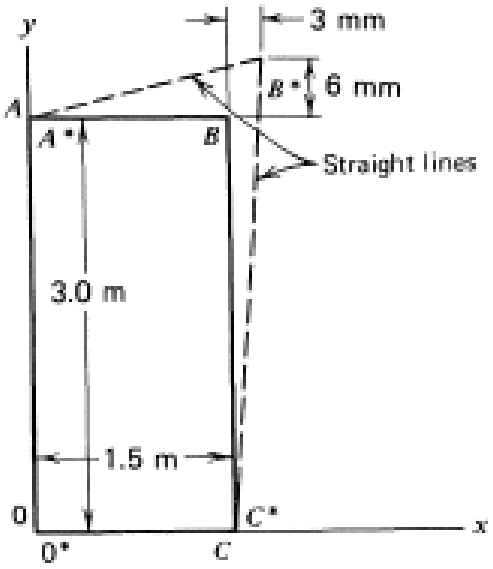
Απάντηση: a) $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} -0.0020 & -0.0010 & 0 \\ -0.0010 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, b) $\Delta\theta = 0.1146^\circ$.



**Πρόβλημα 2**

Η πλάκα του σχήματος φορτίζεται έτσι ώστε να επικρατούν συνθήκες "επίπεδης παραμορφώσεως", δηλαδή $u_z = 0$. Το πεδίο των μετατοπίσεων στην πλάκα είναι της μορφής $u_x(x,y) = a\,x\,y$ and $u_y(x,y) = b\,x\,y$, όπου $a$ και $b$ είναι σταθερές.

a) Να υπολογιστεί το πεδίο των μετατοπίσεων στην πλάκα.
b) Να υπολογιστεί η τιμή του τανυστή των απειροστών παραμορφώσεων στο σημείο $B$.
c) Να υπολογιστεί η μεταβολή του μήκους της απειροστής υλικής ίνας στο $B$ στην κατεύθυνση $OB$.
d) Να υπολογιστεί η ογκομετρική παραμόρφωση και ο αποκλίνων τανυστής των απειροστών παραμορφώσεων στην πλάκα.
e) Εάν το πάχος της πλάκας είναι 1 m, να υπολογιστεί η μεταβολή του όγκου της πλάκας.




Απάντηση: a) $a = \frac{2}{3}\times 10^{-3}$, $b = 2a$, b) $[\varepsilon] = 10^{-3}\times\begin{bmatrix} 2 & 2.5 & 0 \\ 2.5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

c) αύξηση του μήκος κατά 0.4%,

d) $\varepsilon_v = b\,x + a\,y$, $\quad [e] = \frac{10^{-3}}{9}\times\begin{bmatrix} 4(y-x) & 3(x+2y) & 0 \\ 3(x+2y) & 2(4x-y) & 0 \\ 0 & 0 & -2(2x+y) \end{bmatrix}$,

e) αύξηση του όγκου κατά 0.009 $m^3$.

**Πρόβλημα 3**

Να υπολογιστούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του απειροστού τανυστή των παραμορφώσεων

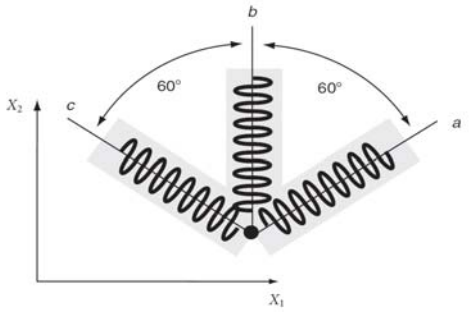
$$\boldsymbol{\varepsilon} = 0.003\,\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_1 + 0.002\left(\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,\mathbf{e}_3\right) + 0.001\left(\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_1\right).$$

Απάντηση: $\varepsilon_1 = 0.0036180$, $\varepsilon_2 = 0.002$, $\varepsilon_3 = 0.0013820$,

$\mathbf{n}^{(1)} = 0.850651\,\mathbf{e}_1 + 0.525731\,\mathbf{e}_2$, $\quad \mathbf{n}^{(2)} = \mathbf{e}_3$, $\quad \mathbf{n}^{(3)} = 0.525731\,\mathbf{e}_1 - 0.850651\,\mathbf{e}_2$.

**Πρόβλημα 4**

Θεωρούμε τις ροζέτες μηκυνσιομέτρων σε σχηματισμό $(\theta_a, \theta_b, \theta_c) = (30^\circ, 90^\circ, 150^\circ)$. Οι αντίστοιχες μετρήσεις των επιφανειακών παραμορφώσεων είναι $\varepsilon_a = 0.001$, $\varepsilon_b = 0.002$ και $\varepsilon_c = 0.004$. Να υπολογιστούν οι συνιστώσες $\varepsilon_{11}$, $\varepsilon_{22}$ και $\varepsilon_{12}$ του τανυστή των απειροστών παραμορφώσεων.




Απάντηση: $\varepsilon_{11} = 2.66667 \times 10^{-3}$, $\varepsilon_{22} = 2 \times 10^{-3}$ και $\varepsilon_{12} = -1.73205 \times 10^{-3}$.

**Πρόβλημα 5**

Θεωρούμε ένα σώμα που καταλαμβάνει το χώρο $0 \le X_i \le a \quad (i = 1,2,3)$. Το πεδίο των μετατοπίσεων στο σώμα ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = 10^{-3}(5X_1 + 2X_2)\mathbf{e}_1 + 10^{-3}(3X_1 + 2X_2)\mathbf{e}_2 + 5 \times 10^{-3} X_3 \mathbf{e}_3 .$$

a) Να υπολογιστούν οι τανυστές των απειροστών παραμορφώσεων $\boldsymbol{\varepsilon}$ και των απειροστών περιστροφών $\boldsymbol{\Omega}$.

b) Να υπολογιστούν οι κύριες παραμορφώσεις, οι κύριες κατευθύνσεις και η μέγιστη διατμητική παραμόρφωση στο σημείο $P = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \frac{a}{4}\right)$.

c) Θεωρούμε την υλική ίνα $OA$ με αρχή το σημείο $O = (0,0,0)$ και τέλος το $A = (a,a,0)$ που περιγράφεται από τις σχέσεις $X_2 = \frac{X_1^2}{a}$, $X_3 = 0$.

Να υπολογιστεί το μήκος της υλικής ίνας $OA$ πριν και μετά την παραμόρφωση.

<u>Υπόδειξη</u> για το ερώτημα c): Η παραμετρική περιγραφή της ίνας $OA$ είναι

$$X_1(\lambda) = a\lambda, \quad X_2(\lambda) = a\lambda^2, \quad X_3 = 0, \quad 0 \le \lambda \le 1.$$

Το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα στη $OA$ είναι $\mathbf{N} = \frac{dX_1}{ds}\mathbf{e}_1 + \frac{dX_2}{ds}\mathbf{e}_2$, όπου

$$dX_1 = \frac{dX_1}{d\lambda} d\lambda, \quad dX_2 = \frac{dX_2}{d\lambda} d\lambda, \quad ds = \sqrt{dX_1^2 + dX_2^2} = \sqrt{\left(\frac{dX_1}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dX_2}{d\lambda}\right)^2}\, d\lambda .$$

Επίσης

$$\int \sqrt{4x^2+1}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{4x^2+1} + \frac{1}{4}\operatorname{arcsinh}(2x), \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}} = \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(2x),$$

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{4x^2+1}} = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+1}, \qquad \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{4x^2+1}} = \frac{x}{8}\sqrt{4x^2+1} - \frac{1}{16}\operatorname{arcsinh}(2x).$$

Απάντηση: a) $[\varepsilon] = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 5 & 2.5 & 0 \\ 2.5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $[\Omega] = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

b) $\varepsilon_1 = \dfrac{7+\sqrt{34}}{2000} = 0.006415$, $\varepsilon_2 = 0.005$, $\varepsilon_3 = \dfrac{7-\sqrt{34}}{2000} = 0.000585$,

c) $\ell_0 = 1.4789\,a$, $\ell = 1.4872\,a$.