Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο Θ Ε Σ Σ Α Λ Ι Α Σ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΟΧΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Λεωφόρος Αθηνών
Πεδίον Άρεως
38334 Βόλος

Διευθυντής: Καθηγητής Ν. Αράβας

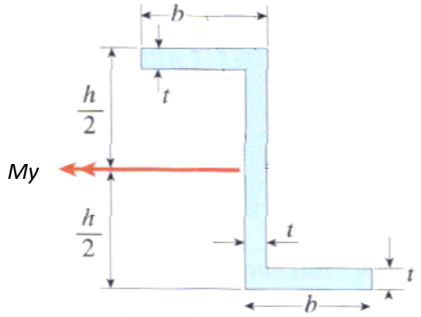
Τηλ.: 2421-074 002
FAX: 2421-074 009
e-mail: aravas@uth.gr

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΙΙ

Σειρά Ασκήσεων 2

Πρόβλημα 1

Η διατομή Z του σχήματος φορτίζεται με καμπτική ροπή $M_y = 5\ \text{KN}\cdot\text{m}$. Να προσδιοριστεί η ουδέτερη γραμμή και η μέγιστη εφελκυστική και θλιπτική τάση στη διατομή. Δίνονται: $h = 200\ \text{mm}$, $b = 90\ \text{mm}$, $t = 15\ \text{mm}$.

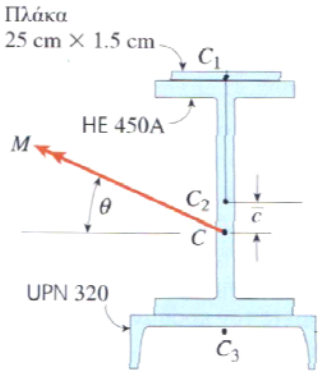


Απάντηση: Ουδέτερη γραμμή: $0.598\,y + 0.362\,z = 0$. $\sigma_{\max}^{\text{εφελκ}} = 40.7\ \text{MPa}$, $\sigma_{\max}^{\text{θλίψη}} = -40.7\ \text{MPa}$.

Πρόβλημα 2

Διατομή χαλύβδινης δοκού έχει κατασκευαστεί από πλατύπελμη διατομή HEA 450, στο πάνω μέρος της οποίας έχει συγκολληθεί πλάκα $25\,\text{cm}\times 1.5\,\text{cm}$ και στο κάτω πέλμα διατομή UPN320, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η δοκός υποβάλλεται σε καμπτική ροπή $M = 18.5\ \text{KN}\cdot\text{m}$, το διάνυσμα της οποίας σχηματίζει γωνία $\theta = 30^\circ$ με την οριζόντια κατεύθυνση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να προσδιοριστεί η ουδέτερη γραμμή και η μέγιστη εφελκυστική και θλιπτική τάση στη διατομή.

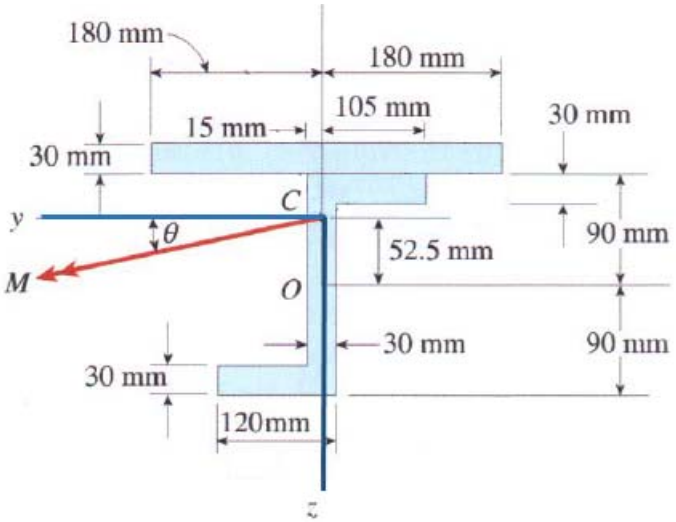
Σημείωση: Για τις εμπορικές διατομές HEA 450 και UPN320 να χρησιμοποιηθούν οι ιδιότητες των διατομών από τους πίνακες που δίνονται στο τέλος του παρόντος αρχείου. Τα σημεία C_1, C_2 και C_3 είναι τα γεωμετρικά κέντρα των επιμέρους διατομών και C είναι το γεωμετρικό κέντρο της σύνθετης διατομής.



Απάντηση: $\bar{c} = 34.73\ \text{mm}$, $C_2C_1 = 227.5\ \text{mm}$, $C_2C_3 = 246\ \text{mm}$. Ουδέτερη γραμμή: $0.0415\,y + 0.0127\,z = 0$. $\sigma_{\max}^{\text{εφελκ}} = 10.3\ \text{MPa}$, $\sigma_{\max}^{\text{θλίψη}} = -9.5\ \text{MPa}$.

Πρόβλημα 3

Η χαλύβδινη διατομή του σχήματος υποβάλλεται σε καμπτική ροπή $M = 4.5\ \text{KN}\cdot\text{m}$, το διάνυσμα της οποίας σχηματίζει γωνία $\theta = 22.5^\circ$ με τον οριζόντιο άξονα y. Να προσδιοριστεί η ουδέτερη γραμμή και η μέγιστη εφελκυστική και θλιπτική τάση στη διατομή.

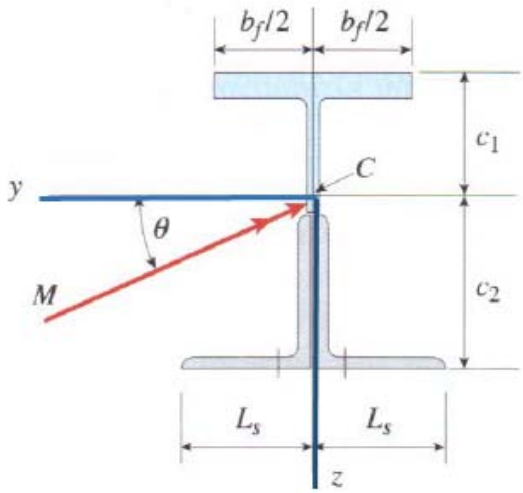


Απάντηση: Ουδέτερη γραμμή: $-0.0199\,y + 0.0439\,z = 0$. $\sigma_{\max}^{\text{εφελκ}} = 6.6\ \text{MPa}$, $\sigma_{\max}^{\text{θλίψη}} = -6.5\ \text{MPa}$.

Πρόβλημα 4

Πρόβολος δοκός στήριξης μπαλκονιού αποτελείται από δοκό διατομής "διπλού Τ", η οποία ενεργεί ως άνω πέλμα και άνω κορμός, και δύο γωνιακά ελάσματα, τα οποία ενεργούν ως κάτω πέλμα και κάτω κορμός, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η δοκός υποβάλλεται σε καμπτική ροπή $M = 15\ \text{KN}\cdot\text{m}$, το διάνυσμα της οποίας σχηματίζει γωνία $\theta = 30^\circ$ με τον οριζόντιο άξονα y. Να προσδιοριστεί η ουδέτερη γραμμή και η μέγιστη εφελκυστική και θλιπτική τάση στη διατομή.

Σημείωση: Να χρησιμοποιηθούν οι τιμές $c_1 = 4.111\ \text{mm}$, $c_2 = 4.169\ \text{mm}$, $b_f = 134\ \text{mm}$, $L_s = 76\ \text{mm}$, $A = 4144\ \text{mm}^2$, $I_{zz} = 3.88\times10^6\ \text{mm}^4$, $I_{yy} = 34.18\times10^6\ \text{mm}^4$.



Απάντηση: Ουδέτερη γραμμή: $1.933\,y - 0.380\,z = 0$. $\sigma_{\max}^{\text{εφελκ}} = 131.1\ \text{MPa}$, $\sigma_{\max}^{\text{θλίψη}} = -148.5\ \text{MPa}$.

Πρόβλημα 5

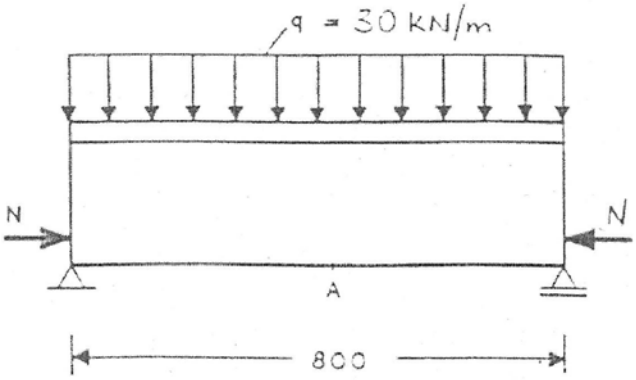
Η αμφιέρειστη δοκός του σχήματος φορτίζεται με το κατανεμημένο φορτίο $q = 30$ KN/m και την αξονική δύναμη N. Η αξονική δύναμη εφαρμόζεται στον άξονα συμμετρίας της διατομής και σε απόσταση 5 cm από τη βάση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι διαστάσεις του σχήματος είναι σε cm. Ζητούνται

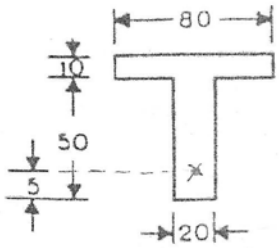
α) Τα γεωμετρικά στοιχεία της διατομής (εμβαδόν, γεωμετρικό κέντρο, συνιστώσα I_{yy} του τανυστής της επιφανειακής ροπής αδρανείας ως προς το κεντρικό σύστημα αξόνων $y-z$, όπου z είναι ο κατακόρυφος άξονας).

β) Η τιμή της αξονικής δυνάμεως N, ώστε η ορθή τάση στην κάτω ίνα της διατομής στο μέσον της δοκού (σημείο A) να είναι μηδενική.

γ) Το διάγραμμα ροπών κάμψεως πριν και μετά την εφαρμογή της N.

δ) Το διάγραμμα της ορθής τάσεως σ_{xx} στις διατομές που βρίσκονται στο μέσον και στα άκρα της δοκού.





Απάντηση:

α) $A = 1800\ \text{cm}^2$, 38.33 cm από τη βάση της διατομής, $I_{yy} = 6.15 \times 10^5\ \text{cm}^4$.

β) $N = 568.1$ KN.

γ) $M_y(x) = 120x - 15x^2 - \frac{1}{3}N$, όπου M_y σε $\text{KN} \cdot \text{m}$, x σε m και N σε KN.

δ) Διατομή στο μέσον της δοκού: $\sigma_{xx} = -3.16 + 8.24z$, όπου σ_{xx} σε MPa και z σε m.

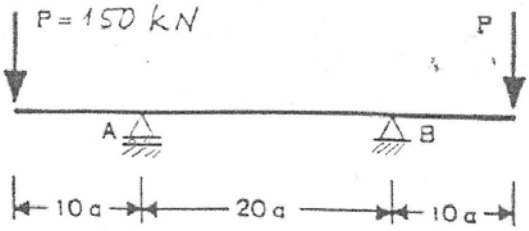
Διατομές στα άκρα της δοκού: $\sigma_{xx} = -3.16 - 30.79z$, όπου σ_{xx} σε MPa και z σε m.

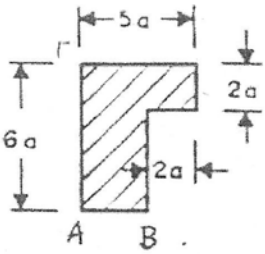
Πρόβλημα 6

Η αμφιέρειστη δοκός του σχήματος δέχεται τα κατακόρυφα φορτία $P = 150$ KN . Η τιμή της διαστάσεως a είναι 15 cm. Ζητούνται

α) Τα γεωμετρικά στοιχεία της διατομής (εμβαδόν, γεωμετρικό κέντρο, συνιστώσες I_{yy}, I_{zz} και I_{yz} του τανυστής της επιφανειακής ροπής αδρανείας ως προς το κεντρικό σύστημα αξόνων $y - z$, όπου z είναι ο κατακόρυφος άξονας).

β) Η εξίσωση και το διάγραμμα της ουδέτερης γραμμής και το διάγραμμα της ορθής τάσεως σ_{xx} σε μία διατομή μεταξύ των στηρίξεων.





Απάντηση:

α) $A = 22a^2$, γεωμετρικό κέντρο $(1.95a, 3.36a)$ ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων με αρχή το A και άξονες τους AB και $A\Gamma$, $I_{yy} = 68.4a^4$, $I_{zz} = 35.3a^4$, $I_{yz} = -16.4a^4$.

β) $\sigma_{xx} = -3.39y + 7.31z$, όπου σ_{xx} σε MPa και (y, z) σε m.

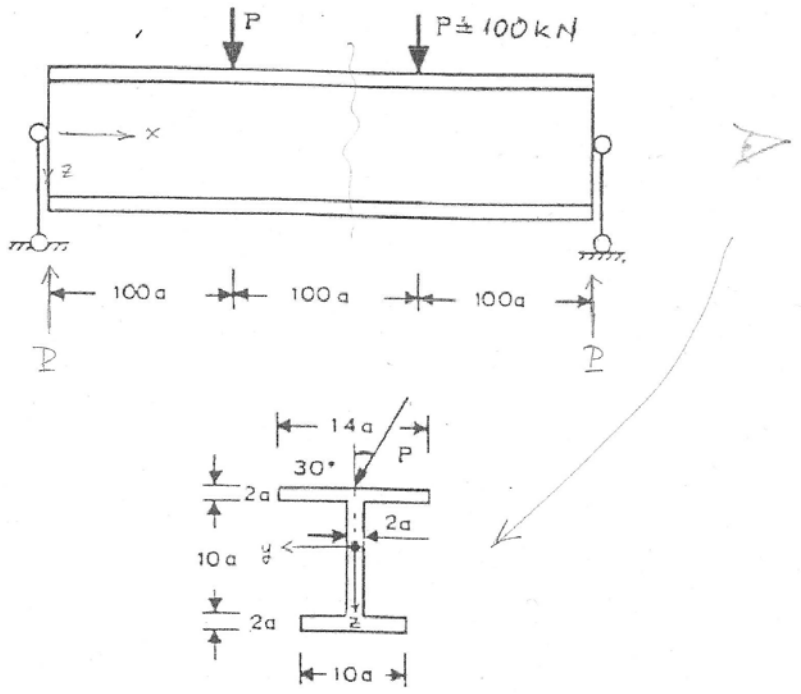
Πρόβλημα 7

Η αμφιέρειστη δοκός του σχήματος δέχεται τα φορτία P με κλίση 30° ως προς το κατακόρυφο επίπεδο. Ζητούνται

α) Τα γεωμετρικά στοιχεία της διατομής (εμβαδόν, γεωμετρικό κέντρο, συνιστώσες I_{yy} και I_{zz} του τανυστής της επιφανειακής ροπής αδρανείας ως προς το κεντρικό σύστημα αξόνων $y-z$, όπου z είναι ο κατακόρυφος άξονας).

β) Η εξίσωση και το διάγραμμα της ουδέτερης γραμμής και το διάγραμμα της ορθής τάσεως σ_{xx} σε μία διατομή μεταξύ των φορτίων P.

γ) Ο υπολογισμός της διαστάσεως a, ώστε, όταν τα φορτία παίρνουν την τιμή $P = 100$ KN, η μέγιστη ελκυστική ορθή τάση να μην υπερβαίνει τα 180 MPa και η μέγιστη θλιπτική τα 140 MPa.



Απάντηση:

α) $A = 68a^2$, γεωμετρικό κέντρο $7.70a$ από τη βάση της διατομής, $I_{yy} = 1876.8a^4$, $I_{zz} = 630.7a^4$.

β) $\sigma_{xx} = \dfrac{0.0793P}{a^3}y + \dfrac{0.0461P}{a^3}z$, όπου σ_{xx} σε MPa, (a, y, z) σε m και P σε MN.

γ) $a \geq 2.46$ cm.

Πρόβλημα 8

Για την άτρακτο του σχήματος

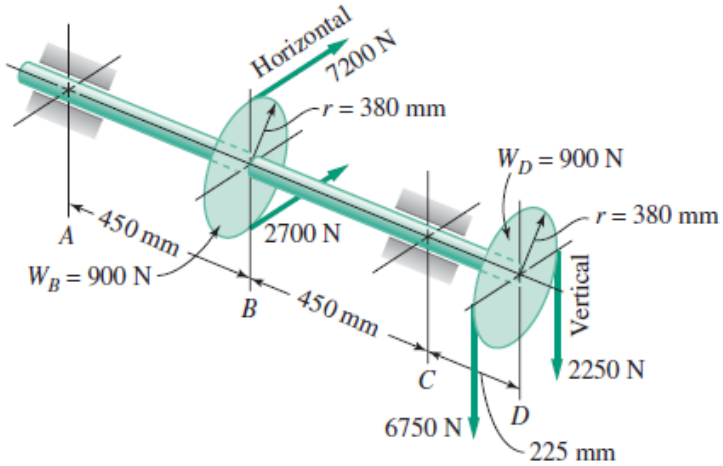
α) Να γίνουν τα διαγράμματα τεμνουσών, στρεπτικών ροπών και καμπτικών ροπών στα επίπεδα που απαιτείται.

β) Να γραφεί η έκφραση της συνολικής καμπτικής ροπής για το διάστημα ανάμεσα στην τροχαλία B και το έδρανο C.

γ) Να βρεθεί η θέση της ατράκτου με την μέγιστη καμπτική ροπή και η αντίστοιχη τιμή (έλεγχος στο διάστημα BC).

δ) Εάν η επιτρεπόμενη τάση σχεδιασμού στην άτρακτο είναι 100 MPa, να υπολογιστεί η ελάχιστη απαιτούμενη διάμετρος.

Σημείωση: Στον σχεδιασμό θα ληφθούν υπόψη και τα αντίστοιχα βάρη των τροχαλιών.



Απάντηση:

β) $M = 45\sqrt{16325x^2 - 22950x + 9882}$ $\quad (0.450\ \text{m} \le x \le 0.900\ \text{m})$, όπου M σε $\text{N}\cdot\text{m}$ και x σε m.

γ) $M_{\max} = 2407\ \text{N}\cdot\text{m}$ στο B.

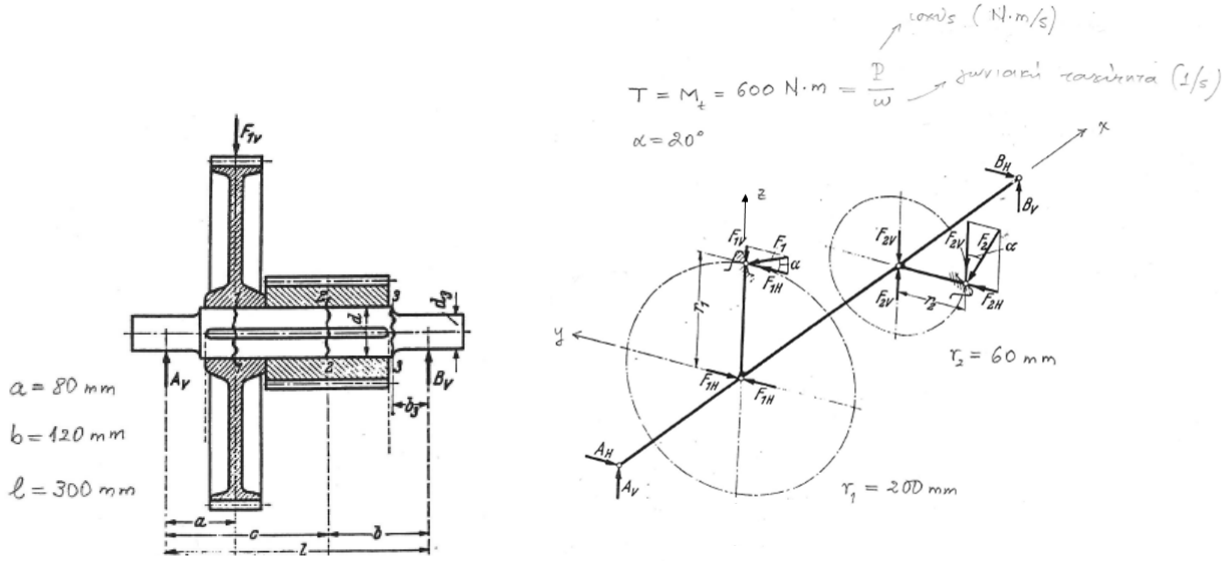
δ) $66\ \text{mm}$.

Πρόβλημα 9

Για την άτρακτο του σχήματος

α) Να γίνουν τα διαγράμματα τεμνουσών, στρεπτικών ροπών και καμπτικών ροπών στα επίπεδα που απαιτείται.

β) Εάν η επιτρεπόμενη τάση σχεδιασμού στην άτρακτο είναι 50 MPa, να υπολογιστεί η ελάχιστη απαιτούμενη διάμετρος.



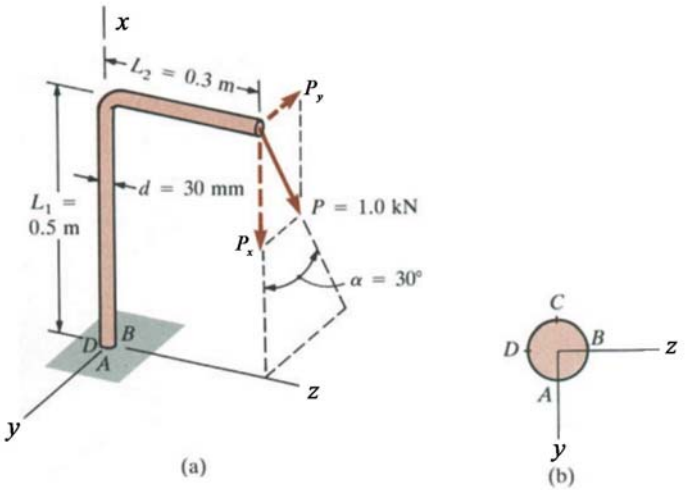
Απάντηση:

α) Μέγιστη ισοδύναμη ροπή 984 $N \cdot m$ (στο μικρό γρανάζι)

β) 29 mm

Πρόβλημα 10

Η δοκός του σχήματος φορτίζεται με την δύναμη P, η οποία είναι παράλληλη στο επίπεδο $x-y$ και σχηματίζει γωνία 30° με την κατακόρυφο. Ζητείται να υπολογιστούν οι τάσεις στα σημεία A, B, C και D στη διατομή της πακτώσεως. Στα ίδια σημεία, να υπολογιστούν η μέγιστη εφελκυστική, μέγιστη θλιπτική και η ισοδύναμη τάση κατά von Mises. Να αγνοηθούν οι διατμητικές τάσεις λόγω τεμνουσών δυνάμεων.



Απάντηση: όλες οι τάσεις σε MPa

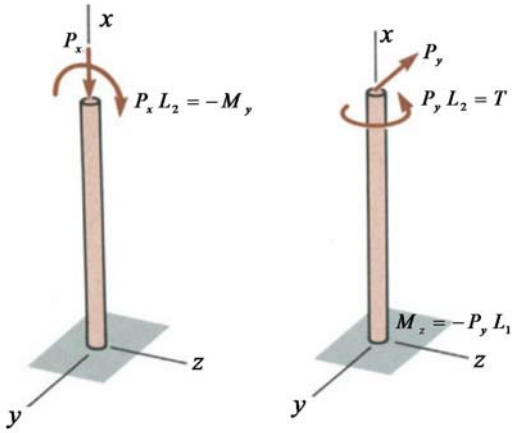
$A: \sigma_{xx} = 91.9$, $\tau = 28.3$, $\sigma_1 = 99.9$, $\sigma_3 = -8.0$, $\sigma_e = 104.1$,

$B: \sigma_{xx} = -100.5$, $\tau = 28.3$, $\sigma_1 = 7.4$, $\sigma_3 = -107.9$, $\sigma_e = 111.8$,

$C:$ $\sigma_{xx} = -96.8$, $\tau = 28.3$, $\sigma_1 = 7.7$, $\sigma_3 = -104.4$, $\sigma_e = 108.5$,

$D:$ $\sigma_{xx} = 95.6$, $\tau = 28.3$, $\sigma_1 = 103.3$, $\sigma_3 = -7.7$, $\sigma_e = 107.4$.

Υπόδειξη: Τα φορτία στο κατακόρυφο τμήμα της δοκού μπορεί να παρασταθούν ως εξής

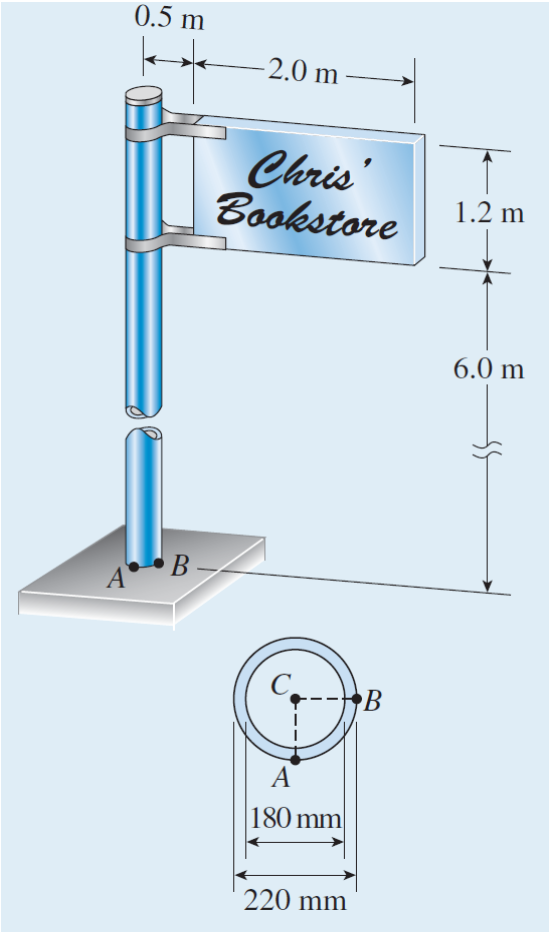


Πρόβλημα 11

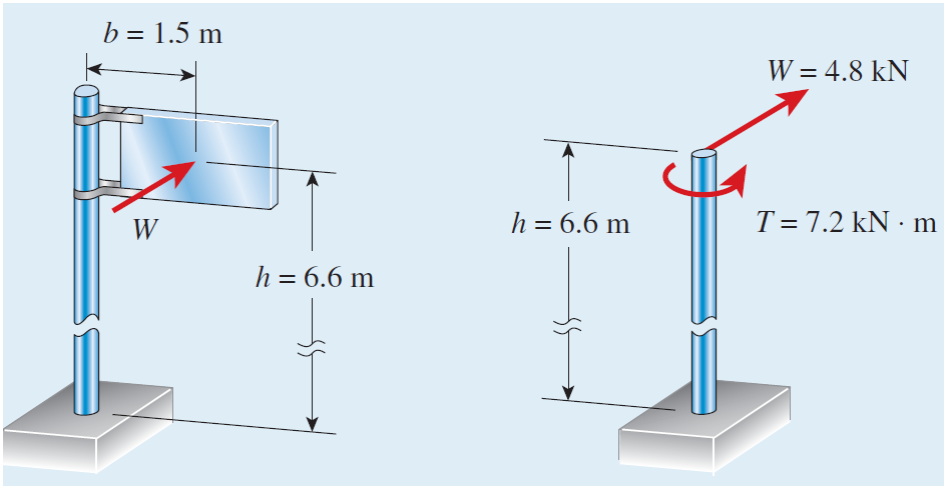
Η πινακίδα του σχήματος στηρίζεται στην κατακόρυφη κοίλη δοκό, η οποία έχει εξωτερική διάμετρο 220 mm και εσωτερική διάμετρο 180 mm.

α) Να υπολογιστούν οι κύριες τάσεις και η μέγιστη διατμητική τάση στα σημεία A και B της βάσεως και στα αντιδιαμετρικά τους σημεία, όταν το φορτίο λόγω ανέμου ισοδυναμεί με μία ομοιόμορφη πίεση 2 kPa στην επιφάνεια της πινακίδας. Να αγνοηθούν οι διατμητικές τάσεις λόγω τεμνουσών δυνάμεων.

β) Να υπολογιστεί η γωνία στροφής της πινακίδας ($E = 200$ GPa , $\nu = 0.3$).



Υπόδειξη: Τα φορτία στο κατακόρυφο τμήμα της δοκού μπορεί να παρασταθούν ως εξής



Απάντηση:

α) όλες οι τάσεις σε MPa

A: $\sigma_1 = 55.6$, $\sigma_3 = -0.7$, $\tau_{\max} = 28.2$,

αντιδιαμετρικό A: $\sigma_1 = 0.7$, $\sigma_3 = -55.6$, $\tau_{\max} = 28.2$,

B: $\sigma_1 = 6.2$, $\sigma_3 = -6.2$, $\tau_{\max} = 6.2$,

αντιδιαμετρικό B: $\sigma_1 = 6.2$, $\sigma_3 = -6.2$, $\tau_{\max} = 6.2$.

β) $\varphi = 0.28^\circ$.

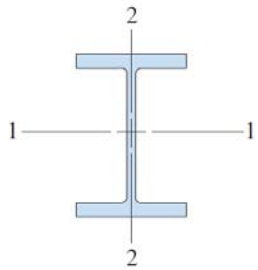


TABLE E-1

Properties of European Wide-Flange Beams

Designation	Mass per meter	Area of section	Depth of section	Width of section	Thickness		Strong axis 1-1			Weak axis 2-2		
	G	A	h	b	t_w	t_f	I_1	S_1	r_1	I_2	S_2	r_2
	kg/m	cm²	mm	mm	mm	mm	cm⁴	cm³	cm	cm⁴	cm³	cm
HE 1000 B	314	400	1000	300	19	36	644700	12890	40.15	16280	1085	6.38
HE 900 B	291	371.3	900	300	18.5	35	494100	10980	36.48	15820	1054	6.53
HE 700 B	241	306.4	700	300	17	32	256900	7340	28.96	14440	962.7	6.87
HE 650 B	225	286.3	650	300	16	31	210600	6480	27.12	13980	932.3	6.99
HE 600 B	212	270	600	300	15.5	30	171000	5701	25.17	13530	902	7.08
HE 550 B	199	254.1	550	300	15	29	136700	4971	23.2	13080	871.8	7.17
HE 600 A	178	226.5	590	300	13	25	141200	4787	24.97	11270	751.4	7.05
HE 450 B	171	218	450	300	14	26	79890	3551	19.14	11720	781.4	7.33
HE 550 A	166	211.8	540	300	12.5	24	111900	4146	22.99	10820	721.3	7.15
HE 360 B	142	180.6	360	300	12.5	22.5	43190	2400	15.46	10140	676.1	7.49
HE 450 A	140	178	440	300	11.5	21	63720	2896	18.92	9465	631	7.29
HE 340 B	134	170.9	340	300	12	21.5	36660	2156	14.65	9690	646	7.53
HE 320 B	127	161.3	320	300	11.5	20.5	30820	1926	13.82	9239	615.9	7.57
HE 360 A	112	142.8	350	300	10	17.5	33090	1891	15.22	7887	525.8	7.43
HE 340 A	105	133.5	330	300	9.5	16.5	27690	1678	14.4	7436	495.7	7.46
HE 320 A	97.6	124.4	310	300	9	15.5	22930	1479	13.58	6985	465.7	7.49
HE 260 B	93	118.4	260	260	10	17.5	14920	1148	11.22	5135	395	6.58
HE 240 B	83.2	106	240	240	10	17	11260	938.3	10.31	3923	326.9	6.08
HE 280 A	76.4	97.26	270	280	8	13	13670	1013	11.86	4763	340.2	7
HE 220 B	71.5	91.04	220	220	9.5	16	8091	735.5	9.43	2843	258.5	5.59
HE 260 A	68.2	86.82	250	260	7.5	12.5	10450	836.4	10.97	3668	282.1	6.5
HE 240 A	60.3	76.84	230	240	7.5	12	7763	675.1	10.05	2769	230.7	6
HE 180 B	51.2	65.25	180	180	8.5	14	3831	425.7	7.66	1363	151.4	4.57
HE 160 B	42.6	54.25	160	160	8	13	2492	311.5	6.78	889.2	111.2	4.05
HE 140 B	33.7	42.96	140	140	7	12	1509	215.6	5.93	549.7	78.52	3.58
HE 120 B	26.7	34.01	120	120	6.5	11	864.4	144.1	5.04	317.5	52.92	3.06
HE 140 A	24.7	31.42	133	140	5.5	8.5	1033	155.4	5.73	389.3	55.62	3.52
HE 100 B	20.4	26.04	100	100	6	10	449.5	89.91	4.16	167.3	33.45	2.53
HE 100 A	16.7	21.24	96	100	5	8	349.2	72.76	4.06	133.8	26.76	2.51

Note: Axes 1-1 and 2-2 are principal centroidal axes.

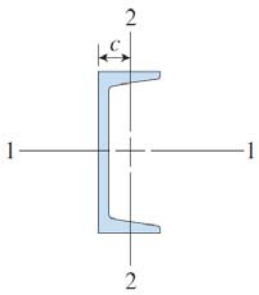


TABLE E-3

Properties of European Standard Channels

Designation	Mass per meter	Area of section	Depth of section	Width of section	Thickness		Strong axis 1-1			Weak axis 2-2			
	G	A	h	b	t_w	t_f	I_1	S_1	r_1	I_2	S_2	r_2	c
	kg/m	cm^2	mm	mm	mm	mm	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	cm
UPN 400	71.8	91.5	400	110	14	18	20350	1020	14.9	846	102	3.04	2.65
UPN 380	63.1	80.4	380	102	13.5	16	15760	829	14	615	78.7	2.77	2.38
UPN 350	60.6	77.3	350	100	14	16	12840	734	12.9	570	75	2.72	2.4
UPN 320	59.5	75.8	320	100	14	17.5	10870	679	12.1	597	80.6	2.81	2.6
UPN 300	46.2	58.8	300	100	10	16	8030	535	11.7	495	67.8	2.9	2.7
UPN 280	41.8	53.3	280	95	10	15	6280	448	10.9	399	57.2	2.74	2.53
UPN 260	37.9	48.3	260	90	10	14	4820	371	9.99	317	47.7	2.56	2.36
UPN 240	33.2	42.3	240	85	9.5	13	3600	300	9.22	248	39.6	2.42	2.23
UPN 220	29.4	37.4	220	80	9	12.5	2690	245	8.48	197	33.6	2.3	2.14
UPN 200	25.3	32.2	200	75	8.5	11.5	1910	191	7.7	148	27	2.14	2.01
UPN 180	22	28	180	70	8	11	1350	150	6.95	114	22.4	2.02	1.92
UPN 160	18.8	24	160	65	7.5	10.5	925	116	6.21	85.3	18.3	1.89	1.84
UPN 140	16	20.4	140	60	7	10	605	86.4	5.45	62.7	14.8	1.75	1.75
UPN 120	13.4	17	120	55	7	9	364	60.7	4.62	43.2	11.1	1.59	1.6
UPN 100	10.6	13.5	100	50	6	8.5	206	41.2	3.91	29.3	8.49	1.47	1.55
UPN 80	8.64	11	80	45	6	8	106	26.5	3.1	19.4	6.36	1.33	1.45

Notes: 1. Axes 1-1 and 2-2 are principal centroidal axes.
2. The distance c is measured from the centroid to the back of the web.
3. For axis 2-2, the tabulated value of S is the smaller of the two section moduli for this axis.