Υπολογιστικές Μέθοδοι στην Ενεργειακή Περιοχή

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Διδάσκων: Δρ. Νίκος Πελεκάσης

Επίκουρος Καθηγητής Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής

Τρόπος Βαθμολόγησης:
Παράδοση τριών υπολογιστικών ασκήσεων, 40 %, Τελική εξέταση, 60 %.

Βιβλιογραφία:

• Ασημακόπουλος, Δ. & Ν. Μαρκάτος, *Υπολογιστική Ρευστοδυναμική*, Παπασωτηρίου, 1995

• Μπεργελές, Γ., *Υπολογιστική Ρευστομηχανική*, Τόμος 1&2, Εκδ. Συμεών, 1997

• Anderson, D.A., J.C. Tannehill, R.H. Pletcher, *Computational Fluid Mechanics & Heat Transfer,* Hemisphere Publishing Corporation, 1984.

• Patankar, S. V., *Numerical Heat Transfer &Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation, 1980.

Τετάρτη 9-11 Αίθουσα Α2 Παλαιά ΠΡΟΚΑΤ, Παρασκευή 11-01 Αίθουσα Α2 Παλαιά ΠΡΟΚΑΤ
Άίθουσα Υπολογιστών ΤΜΜ

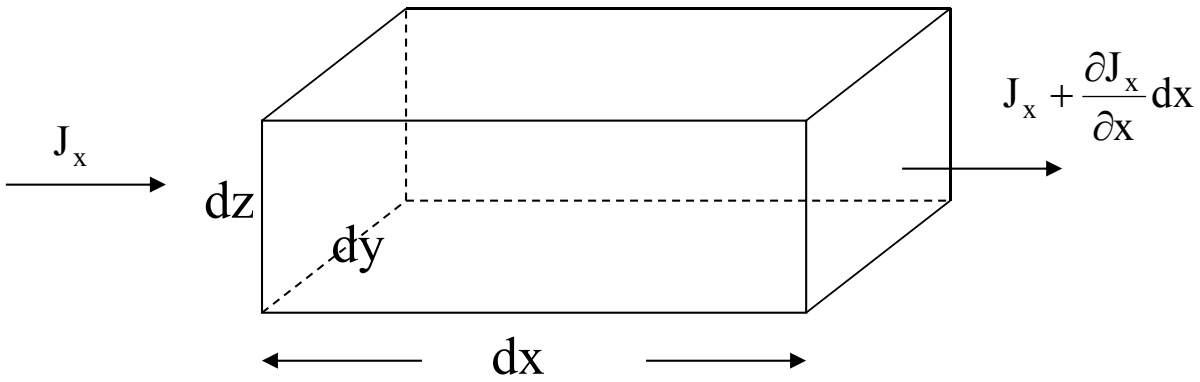
Περιεχόμενα

- Διαφορική Μορφή των Θεμελιωδών Εξισώσεων Διατήρησης
- Ταξινόμηση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων
- Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών – Ακρίβεια, Ευστάθεια & Σύγκλιση Αριθμητικών Σχημάτων – Διακριτοποίηση της Εξίσωσης Μεταφοράς – Επίλυση Τριδιαγώνιου Προβλήματος με την Μέθοδο Thomas – Εφαρμογή στην μονοδιάστατη κυματική εξίσωση
- Παραβολικά προβλήματα – Ρητά και άρρητα σχήματα χρονικής ολοκλήρωσης – Μεταβατική και μόνιμη κατάσταση – Εφαρμογή στην μεταφορά μάζας
- Ελλειπτικά Προβλήματα – Διακριτοποίηση με Πεπερασμένες Διαφορές – Επίλυση με απ' ευθείας Αντιστροφή Πίνακα και με Επαναληπτικές Μεθόδους – Μέθοδος Gauss-Seidel με Σάρωση και Χρήση Υπερχαλάρωσης – Εφαρμογή στην μεταφορά θερμότητας
- Υπερβολικά Προβλήματα – Μέθοδος Χαρακτηριστικών – Αναλλοίωτες Riemann – Αριθμητικά Σχήματα Πεπερασμένων Διαφορών – Εφαρμογή στην μεταφορά ορμής σε συμπιεστή ροή

Αρχές Διατήρησης – Θεμελιώδεις Διαφορικές Εξισώσεις

Eulerian Όγκος Ελέγχου – Ακίνητος Όγκος Ελέγχου

Ακίνητος Παρατηρητής μεταβολών στον όγκο ελέγχου



Αρχή διατήρησης σε διαφορική μορφή μπορεί να διατυπωθεί για οποιαδήποτε φυσική ποσότητα ανηγμένη ανά μονάδα μάζας, φ.

$$\left(\text{ειδικη ενθαλπια } h = \frac{\text{Ενθαλπια}}{\text{Μαζα}}, \quad \text{κλασμα μαζας } \omega_i = \frac{\text{Μαζα συστατικου } i}{\text{Συνολικη Μαζα}} \quad \text{ταχυτητα } \vec{u} = \frac{\text{Ορμη}}{\text{Μαζα}} \right)$$

J_x: x συνιστώσα της μεταφερόμενης φυσικής ποσότητας ανά μονάδα χρόνου και επιφάνειας με διαστάσεις, $\frac{\text{Ποσοτητα}}{\text{Επιφανεια} \cdot \text{Χρονος}}$, αγγλικά flux.

π.χ. για μεταφορά ορμής το flux ορίζεται ως εξής $\dfrac{\text{Ορμη}}{\text{Επιφανεια}\cdot\text{Χρονος}} = \dfrac{\text{kg}\cdot\dfrac{\text{m}}{\text{s}}}{\text{m}^2\cdot\text{s}} = \dfrac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}^2}$

διαστάσεις πίεσης

Για τον όγκο ελέγχου (ΟΕ) ισχύει:

$$\begin{pmatrix}\textbf{Συσσώρευση Φυσικής Ποσότητας}\\ \textbf{στον ΟΕ}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\textbf{Εκροή Φυσικής Ποσότητας}\\ \textbf{από ττο ΟΕ}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\textbf{Εισροή Φυσικής Ποσότητας}\\ \textbf{στον ΟΕ}\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}\textbf{Παραγωγή Φυσικής Ποσότητας}\\ \textbf{στον ΟΕ}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\textbf{Κατανάλωση Φυσικής Ποσότητας}\\ \textbf{στον ΟΕ}\end{pmatrix}$$

$$\phi\,\frac{\textbf{Ποσότητα}}{\textbf{Μάζα}} \times \rho\,\frac{\textbf{Μάζα}}{\textbf{Όγκος}} = \rho\phi\,\frac{\textbf{Ποσότητα}}{\textbf{Όγκος}}$$

φ: εντατική ποσότητα

φM: εκτατική ποσότητα

$$\begin{pmatrix}\text{Συσσώρευση Φυσικής Ποσότητας}\\ \text{στον ΟΕ ανά μονάδα χρόνου}\end{pmatrix}: \quad \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\,dxdydz = \frac{\text{Φυσική Ποσότητα}}{\text{Χρόνος}}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Παραγωγή Φυσικής Ποσότητας}\\ \text{στον ΟΕ ανά μονάδα χρόνου}\end{pmatrix}: q\ dxdydz \qquad \text{π.χ.} \quad \rho\,\vec{g} = \frac{\text{Παραγωγή Ορμής}}{\text{Χρόνος Όγκος}} = \frac{\text{kg}\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}}{\text{s m}^3} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Κατανάλωση Φυσικής Ποσότητας}\\ \text{στον ΟΕ ανά μονάδα χρόνου}\end{pmatrix}: R\ dxdydz \qquad \text{π.χ.} \quad R = \frac{\text{Ρυθμός Αντίδρασης Συστατικού i}}{\text{Χρόνος Όγκος}}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Εκροή Φυσικής} \\ \text{Ποσότητας από ττο ΟΕ} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Εισροή Φυσικής} \\ \text{Ποσότητας στον ΟΕ} \end{pmatrix} = \oiint_{CS} \vec{J} \cdot \vec{n} dA = \sum_{i=1}^{6} \left(\vec{J} \cdot \vec{n} \right)_i \Delta A_i$$

Απλοποιημένο Ολοκληρωτικό Ισοζύγιο

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} \Delta V + \left[\left(J\big|_{x+\Delta x} - J\big|_x \right) \Delta y \Delta z + \left(J\big|_{y+\Delta y} - J\big|_y \right) \Delta x \Delta z + \left(J\big|_{z+\Delta z} - J\big|_z \right) \Delta x \Delta y \right] = \left(\dot{q} - \dot{R} \right) \Delta V$$

$\vec{\mathbf{J}} = \left(\mathbf{J_x}, \mathbf{J_y}, \mathbf{J_z} \right)$ ρυθμός ροής φυσικής ποσότητας ανά μονάδα χρόνου και επιφάνειας κάθετα σε συγκεκριμένη επιφάνεια

$\mathbf{J_x}$ Συνιστώσα της ροής φυσικής ποσότητας δια μέσου επιφάνειας κάθετης στον άξονα x, ευρισκόμενης στην θέση x

$\mathbf{J_{x+\Delta x}}$ Συνιστώσα της ροής φυσικής ποσότητας δια μέσου επιφάνειας κάθετης στον άξονα x, ευρισκόμενης στην θέση x+Δx

$\left(\mathbf{J_{x+\Delta x}} - \mathbf{J_x} \right) \mathbf{dydz}$ Συνολικός ρυθμός καθαρής εκροής (εκροή-εισροή) της ποσότητας από τον ΟΕ στην διεύθυνση x

$$= \left(\mathbf{J_x} + \frac{\partial \mathbf{J_x}}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{O}\left(\Delta \mathbf{x}^2 \right) - \mathbf{J_x} \right) \mathbf{dydz} = \frac{\partial \mathbf{J_x}}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{V} + \mathbf{O}\left(\Delta \mathbf{x} \right)$$

Για τις τρεις διευθύνσεις έχουμε

$$\left(\frac{\partial \mathbf{J_x}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{J_y}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{J_z}}{\partial \mathbf{z}} \right) \mathbf{dxdydz} + \mathbf{O}\left(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{y}, \Delta \mathbf{z} \right) \Delta \mathbf{V} = \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{J}} \right) \Delta \mathbf{V}$$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{J}}$ Ρυθμός καθαρής εκροής ανά μονάδα όγκου

Συνολικά έχουμε $\left[\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{J}\right]\cancel{dxdydz}+\cancel{\Delta V}\,O(\Delta x,\Delta y,\Delta z)=(q-R)\cancel{dxdydz}\rightarrow$

Διαφορικό Ισοζύγιο $\xrightarrow{\Delta x,\Delta y,\Delta z\to 0}\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=q-R \quad (1)$

Διατήρηση Συνολικής Μάζας - Ολοκληρωτική Μορφή

$$0=\left.\frac{dm}{dt}\right|_{\Sigma\upsilon\sigma\tau}\xrightarrow[\text{Reynolds}]{\text{Θεώρημα Μεταφοράς}}\frac{d}{dt}\int_{CV}\rho dV+\int_{CS}\rho\left(\vec{u}_r\cdot\vec{n}\right)dA=\int_{CV}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV+\int_{CS}\rho\left(\vec{u}\cdot\vec{n}\right)dA=0$$

$$\xrightarrow{\text{Gauss}}\iiint_{CV}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV+\iiint_{CV}\vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{u}\right)dV=\iiint_{CV}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{u}\right)\right]dV=0\xrightarrow{\Delta V\to 0}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{u}\right)=0$$

Διατήρηση Συνολικής Μάζας – Διαφορική Μορφή

$$\phi=1\frac{\text{Μάζα}}{\text{Μάζα}},\quad \vec{J}=\rho\vec{u}=\frac{kg}{m^3}\frac{m}{s}=\frac{kg}{m^2s}\leftarrow$$ Ρυθμός ροής μάζας ανά μονάδα επιφάνειας

Εάν δεν υπάρχουν πηγές ή καταβόθρες στον ΟΕ

$$(1)\to\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{u}\right)=0\leftarrow$$ **Εξίσωση Συνέχειας**

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{u}\cdot\left(\vec{\nabla}\rho\right)+\rho\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right)=0\to\frac{D\rho}{Dt}+\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u}=0\quad(2)$$

Λαγκραντζιανή αναπαράσταση για κάθε σωματίδιο

Χρήση **Υλικής Παραγώγου**

Για ασυμπίεστο ρευστό $\frac{D\rho}{Dt}=0\to\vec{\nabla}\cdot\vec{u}=0$

Για μόνιμη ροή $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\to\vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{u}\right)=0$

Νόμοι που Διέπουν την Διάχυση

$$\vec{\mathbf{J}} = \rho\bar{\mathbf{u}}\phi + \vec{\mathbf{D}} \leftarrow$$ Ρυθμός ροής εντατικής ποσότητας φ

συναγωγή διάχυση

Συντελεστές Διάχυσης

$$\vec{q} = -k\vec{\nabla}T\frac{\text{Joule}}{\text{s m}^2},$$ **Νόμος Fourier**

$$\Gamma_i = \frac{D_i}{\rho},\ \alpha = \frac{k}{\rho c_p},\ \nu = \frac{\mu}{\rho} \sim \frac{m^2}{s}$$

$$\vec{D}_i = -D_i\vec{\nabla}\omega_i\frac{\text{kg}}{\text{s m}^2},$$ **Νόμος Fick**

$$\frac{\vec{D}_i}{MW_i} = \vec{\Gamma}_i = -\Gamma_i\vec{\nabla}c_i\frac{\text{mol}}{\text{s m}^2},\quad D_i = \Gamma_i\rho,\quad c_i = \frac{\rho\omega_i}{MW_i}$$

$$\underline{\underline{P}} = p\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\tau}},\quad \tau_{ij} = \mu\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta_{ij}\right]$$

Νόμος Newton για Νευτωνικά ρευστά

συμμετρικοί τανυστές

Πίεση : ισοτροπικό μέρος τανυστή τάσεων

Για ασυμπίεστο Νευτωνικό Ρευστό

$$\underline{\underline{P}} = p\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\tau}} = p\underline{\underline{I}} - \mu\left(\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{\nabla}\vec{u}^T\right)$$

Εναλλακτικά και προκειμένου να φανεί η αναλογία με την μεταφορά μάζας και θερμότητας

$$\underline{\underline{T}} = -\underline{\underline{P}} = -p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}} = -p\underline{\underline{I}} + \mu\left(\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{\nabla}\vec{u}^T\right)$$

Μεταφορά Μάζας

ω_i: κλάσμα μάζας i συστατικού μίγματος

$$\vec{J} = \rho\vec{u}\omega_i + \vec{D}_i$$

$$\phi = \omega_i$$

$\rho\vec{\mathbf{u}}\omega_i$: ρυθμός μεταφοράς μάζας i συστατικού μέσω συναγωγής

$\vec{D}_i$: ρυθμός μεταφοράς μάζας i συστατικού μέσω διάχυσης

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\omega_i\right) + \vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{u}\omega_i + \vec{D}_i\right) = R_i \rightarrow$$

$$\rho\frac{\partial\omega_i}{\partial t} + \omega_i\frac{\partial\rho}{\partial t} + \omega_i\vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{u}\right) + \rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\omega_i = -\vec{\nabla}\cdot\vec{D}_i + R_i \xrightarrow[\text{Νόμος Fick}]{\text{Συνέχεια}}$$

$$\rho\frac{\partial\omega_i}{\partial t} + \rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\omega_i = \vec{\nabla}\cdot\left(D_i\vec{\nabla}\omega_i\right) + R_i$$

$$\rho\omega_i = \frac{\text{kg συστατικού i}}{\text{Όγκο}} = \rho_i = c_i MB_i$$

c_i: συγκέντρωση συστατικού i

MW_i: μοριακό βάρος συστατικού i

$$\rho \text{ σταθερό} \rightarrow \frac{\partial\omega_i}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\omega_i = \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{D_i}{\rho}\vec{\nabla}\omega_i\right) + \frac{R_i}{\rho} \xrightarrow[\Gamma_i = \frac{D_i}{\rho},\ \omega_i = \frac{c_i MW_i}{\rho}]{R_i' = \frac{R_i}{MB_i}} \qquad \frac{\partial c_i}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}c_i = \vec{\nabla}\cdot\left(\Gamma_i\vec{\nabla}c_i\right) + R_i'$$

$$\xrightarrow[\text{Διάχυσης}]{\text{Σταθερός Συντελεστής}} \frac{\partial\omega_i}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\omega_i = \Gamma_i\nabla^2\omega_i + \frac{R_i}{\rho} \qquad \frac{\partial c_i}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}c_i = \Gamma_i\nabla^2 c_i + R_i'$$

Για μίγμα n συστατικών ισχύει $\sum_{i=1}^{n}\omega_i = 1 \quad \sum_{i=1}^{n}R_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{D}_i = 0$

Μεταφορά Ορμής σε Ολοκληρωτική Μορφή

- Νόμος του Νεύτωνα για ακίνητο ΟΕ

$$\underline{\underline{T}} = -p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}} = -p\underline{\underline{I}} + \mu\left(\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{\nabla}\vec{u}^{T}\right)$$

$\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ **:** Τάσεις ασκούμενες από το περιβάλλον στο ρευστό

Τανυστής Ιξωδών τάσεων για Νευτωνικό ρευστό

$$\left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right|_{\Sigma} = \Sigma\vec{F} \xrightarrow{\text{Θεώρημα Μεταφοράς}} \frac{d}{dt}\iiint_{CV} \rho\vec{u}dV + \oiint_{CS} \rho\vec{u}\left(\vec{u}_r \cdot \vec{n}\right)dA = \iiint_{CV} \rho\vec{g}dV + \oiint_{CS} \underline{\underline{T}} \cdot \vec{n}dA \rightarrow$$

$$\iiint_{CV} \frac{\partial\left(\rho\vec{u}\right)}{\partial t}dV + \oiint_{CS} \left[\rho\vec{u}\vec{u} + p\underline{\underline{I}} - \mu\left(\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{\nabla}\vec{u}^{T}\right)\right] \cdot \vec{n}dA = \iiint_{CV} \rho\vec{g}dV$$

$$\underline{\underline{\mathrm{J}}} = \rho\vec{\mathrm{u}}\vec{\mathrm{u}} + \underline{\underline{\mathrm{P}}}$$

Παραγωγή Ορμής

$$\iiint_{CV} \frac{\partial\left(\rho\vec{u}\right)}{\partial t}dV + \oiint_{CS} \underline{\underline{J}} \cdot \vec{n}dA = \iiint_{CV} \rho\vec{g}dV \xrightarrow{\Delta V \to 0}$$

$$\frac{\partial\left(\rho\vec{u}\right)}{\partial t}\Delta V + \sum_{i=1}^{6}\left(\underline{\underline{J}} \cdot \vec{n}\right)_i \Delta A_i = \rho\vec{g}\Delta V \rightarrow \frac{\partial\left(\rho\vec{u}\right)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{J}} = \rho\vec{g}$$

Εναλλακτικά

$$\iiint_{CV} \frac{\partial\left(\rho\vec{u}\right)}{\partial t}dV + \iiint_{CV} \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{J}}dV = \iiint_{CV} \rho\vec{g}dV$$

Μεταφορά Ορμής σε Διαφορική Μορφή

$$\xrightarrow{\Delta V \to 0} \frac{\partial\left(\rho\vec{u}\right)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{J}} = \rho\vec{g} \rightarrow \boxed{\frac{\partial\left(\rho\vec{u}\right)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho\vec{u}\vec{u} - \underline{\underline{\mathrm{T}}}\right) = \rho\vec{g}}$$

Μεταφορά Ορμής σε Διαφορική Μορφή

$$\vec{J} = \rho\vec{u}u_m + \vec{P}_m \qquad \varphi = u_m$$

$\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ **:** Τάσεις ασκούμενες από το περιβάλλον στο ρευστό

$\underline{\underline{P}}$: Τάσεις ασκούμενες από το ρευστό στο περιβάλλον

$\mathbf{u_m}, \vec{\mathbf{P}}_\mathbf{m}$ **:** ταχύτητα και διαχεόμενη ορμή κατά την διεύθυνση m, όχι κατ΄ ανάγκη παράλληλη με μία από τις 3 καρτεσιανές διευθύνσεις

$\vec{P}_m$: Άνυσμα τάσης σε επίπεδο με κάθετο διάνυσμα το $\vec{e}_m$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}(\rho\mathbf{u_m}) + \vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{\mathbf{u}}\mathbf{u_m} + \vec{\mathbf{P}}_\mathbf{m}\right) = \rho\mathbf{g_m}$$

g: συνιστώσα βαρύτητας στην m διεύθυνση

Σε μορφή Καρτεσιανών Τανυστών

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_m) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i u_m) = -\frac{\partial P_{m,i}}{\partial x_i} + \rho g_m \rightarrow$$

$$u_m \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial u_m}{\partial t} + u_m \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) + \rho u_i \frac{\partial u_m}{\partial x_i} = -\frac{\partial P_{m,i}}{\partial x_i} + \rho g_m \xrightarrow{\text{Συνέχεια}}$$

0

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}u_m = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\cdot\vec{P}_m + g_m \rightarrow \frac{Du_m}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\cdot\vec{P}_m + g_m$$

εάν $u_m \equiv u_i \rightarrow$ $$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\cdot\vec{P}_i + g_i \xrightarrow{\underline{\underline{T}}=-\underline{\underline{P}}} \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{T}} + \vec{g},$$ ← Εξίσωση Κίνησης Συνεχούς Μέσου (ΕΚΣΜ)

Για Νευτωνικό ρευστό:

$$\rho\frac{Du_i}{Dt} = g_i + \vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{T}} \rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta_{ij}\right)\right]$$

Για ασυμπίεστο ρευστό: $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$

με σταθερό ιξώδες:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (NS)$$

Navier-Stokes

Για άτριβη ροή:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i$$

Εξισώσεις Euler

$$(\text{ΕΚΣΜ})\cdot\vec{u} \rightarrow u_i\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{u_i}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i g_i + \frac{u_i}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial(u_i u_i)}{\partial t} + \frac{u_j}{2}\frac{\partial(u_i u_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(u_i p)}{\partial x_i} + \frac{p}{\rho}\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i g_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial(u_i \tau_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\tau_{ij}}{\rho} \rightarrow$$

$$\rho\frac{D(u^2/2)}{Dt} = \rho\vec{u}\cdot\vec{g} - \vec{\nabla}\cdot(p\vec{u}) + \vec{\nabla}\cdot(\vec{u}\cdot\underline{\underline{\tau}}) + p\vec{\nabla}\cdot\vec{u} - \underline{\underline{\tau}} : \vec{\nabla}\vec{u}$$

Εξίσωση Μηχανικής Ενέργειας **Συμπιεστότητα** **Ιξώδης Σκέδαση**

$$\rho\vec{u}\cdot\vec{g} = -\rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}(gz) = -\rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}(gz) - \rho\frac{\partial(gz)}{\partial t} \qquad \text{αφού} \quad \frac{\partial(gz)}{\partial t} = 0$$

Συνεπώς για την μεταβολή της μηχανικής ενέργειας σε διαφορική μορφή ισχύει:

$$\rho\frac{D(u^2/2)}{Dt} + \rho\frac{D(gz)}{Dt} = \rho\frac{D(u^2/2+gz)}{Dt} = -\vec{\nabla}\cdot(p\vec{u}) + \vec{\nabla}\cdot(\vec{u}\cdot\underline{\underline{\tau}}) + p\vec{\nabla}\cdot\vec{u} - \underline{\underline{\tau}}:\vec{\nabla}\vec{u} \rightarrow$$

$$\rho\frac{D(u^2/2+gz)}{Dt} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{u}\cdot\underline{\underline{T}}) + p\vec{\nabla}\cdot\vec{u} - \underline{\underline{\tau}}:\vec{\nabla}\vec{u}$$

Ρυθμός Μεταβολής Μηχανικής Ενέργειας

Αξονικό Έργο

Αντιστρεπτές Απώλειες Μηχανικής Ενέργειας λόγω Συμπιεστότητας

Αναντίστρεπτες Απώλειες Μηχανικής Ενέργειας λόγω Ιξώδους Σκέδασης

Μεταφορά Ενέργειας

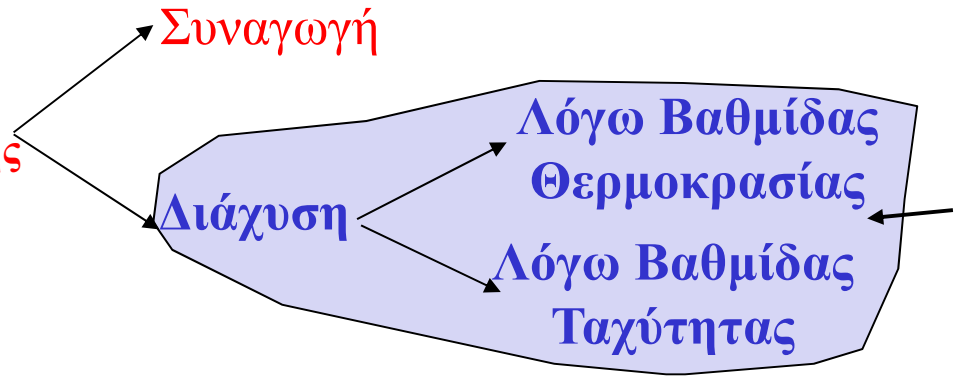
Πρώτος Θερμοδυναμικός Νόμος (για Σύστημα)

Ρυθμός Μεταβολής Ενέργειας Συστήματος = **Ρυθμός Μεταφοράς Θερμότητας από το Περιβάλλον προς το Σύστημα** + **Ρυθμός Παραγωγής Έργου από το Περιβάλλον προς το Σύστημα** + **Ρυθμός Καθαρής Παραγωγής Θερμότητας στον ΟΕ μέσω Πηγών Ενέργειας**

Για Όγκο Ελέγχου

Ρυθμός Μεταβολής Ενέργειας Συστήματος = **Ρυθμός Συσσώρευσης Εσωτερικής & Μηχανικής Ενέργειας στον ΟΕ** + **Ρυθμός Καθαρής Εκροής Εσωτερικής & Μηχανικής Ενέργειας από τον ΟΕ**

Ρυθμός Καθαρής Εκροής Εσωτερικής & Μηχανικής Ενέργειας



Συνήθως πηγαίνουν στο δεξιό μέλος και συμβολίζουν εναλλαγή θερμότητας και έργου στα όρια του συστήματος

Ρυθμός Καθαρής Παραγωγής Θερμότητας στον ΟΕ μέσω Πηγών Ενέργειας → Αφορά στην μεταβολή του ενεργειακού περιεχομένου άλλων μορφών ενέργειας, π.χ. χημικής, πυρηνικής, μηχανικής κτλπ, που υπάρχουν μέσα στο Σύστημα ή στον Όγκο Ελέγχου κατά την διάρκεια της μελετούμενης διεργασίας, και η οποία ισοδυναμεί με ογκομετρικό ρυθμό παραγωγής θερμότητας

$$\frac{\text{Εσωτερική Ενέργεια}}{\text{Μάζα}} = e = h - \frac{p}{\rho} \qquad \frac{\text{Μηχανική Ενέργεια}}{\text{Μάζα}} = \frac{u^2}{2} + zg$$

ειδική ενθαλπία **υψόμετρο**

$$\varphi = e + \frac{u^2}{2} + zg, \quad \vec{J} = \rho\left(e + \frac{u^2}{2} + zg\right)\vec{u} + \vec{D}, \quad \vec{D} = \vec{q} + \vec{W} = -k\vec{\nabla}T - \left(\underline{\underline{T}} \cdot \vec{u}\right)$$

S : ρυθμός παραγωγής θερμότητας λόγω εσωτερικών πηγών

Ολοκληρωτική Μορφή Εξίσωσης Διατήρησης Συνολικής Ενέργειας

$$\left.\frac{dE}{dt}\right|_{\Sigma} = \dot{Q} + \dot{W} \xrightarrow[\text{Reynolds}]{\text{Θεώρημα Μεταφοράς}}$$

$$\frac{d}{dt}\iiint_{CV} \rho\phi dV + \oiint_{CS} \rho\phi\left(\vec{u}_r \cdot \vec{n}\right)dA = \iiint_{CV} \dot{q}dV + \oiint_{CS} k\vec{\nabla}T \cdot \vec{n}dA + \oiint_{CS}\left(\vec{n} \cdot \underline{\underline{T}}\right) \cdot \vec{u}dA \xrightarrow{\vec{u} = \vec{u}_r + \vec{u}_{CV}}$$

$$\frac{d}{dt}\iiint_{CV} \rho\phi dV + \oiint_{CS} \rho\left(\phi + \frac{p}{\rho}\right)\left(\vec{u}_r \cdot \vec{n}\right)dA = \underbrace{\iiint_{CV} \dot{q}dV + \oiint_{CS} k\vec{\nabla}T \cdot \vec{n}dA}_{\dot{Q}} + \underbrace{\oiint_{CS}\left(\vec{n} \cdot \underline{\underline{\tau}}\right) \cdot \vec{u}_r dA}_{\dot{W}_\tau} + \underbrace{\oiint_{CS}\left(\vec{n} \cdot \underline{\underline{T}}\right) \cdot \vec{u}_{CV} dA}_{\dot{W}_s}$$

$$\frac{d}{dt}\iiint_{CV} \rho\phi dV + \oiint_{CS} \rho\phi\vec{u}_r \cdot \vec{n}dA = \iiint_{CV} \dot{q}dV + \oiint_{CS} k\vec{\nabla}T \cdot \vec{n}dA + \oiint_{CS}\left(\vec{n} \cdot \underline{\underline{T}}\right) \cdot \vec{u}_r dA + \oiint_{CS}\left(\vec{n} \cdot \underline{\underline{T}}\right) \cdot \vec{u}_{CV} dA$$

$$\xrightarrow[\vec{u}_{CV}\text{ : Ταχύτητα ΟΕ}]{Leibniz} \iiint_{CV} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \oiint_{CS} \rho\phi\vec{u} \cdot \vec{n}dA = \iiint_{CV} \dot{q}dV + \oiint_{CS} k\vec{\nabla}T \cdot \vec{n}dA + \oiint_{CS}\left(\vec{n} \cdot \underline{\underline{T}}\right) \cdot \vec{u}dA \xrightarrow{Gauss}$$

$$\iiint_{CV}\left[\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\underbrace{\left(\rho\phi\vec{u}-k\vec{\nabla}T-\underline{\underline{T}}\cdot\vec{u}\right)}_{\underline{\underline{J}}}-\dot{q}\right]dV=0\xrightarrow[\dot{q}=\dot{S}]{\Delta V\to 0}$$

Διαφορικό Ισοζύγιο Ενέργειας

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{u}\varphi+\vec{q}+\vec{W}\right)=S \quad\rightarrow\quad \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{u}\varphi\right)=-\vec{\nabla}\cdot\vec{q}-\vec{\nabla}\cdot\vec{W}+S$$

$-\vec{\nabla}\cdot\vec{q}=\vec{\nabla}\cdot\left(k\vec{\nabla}T\right)$: Ρυθμός καθαρής εισροής θερμότητας ανά μονάδα όγκου, λόγω διάχυσης από το περιβάλλον προς τον ΟΕ

Νόμος Fourier

$$-\vec{\nabla}\cdot\vec{W}=\vec{\nabla}\cdot\left(\underline{\underline{T}}\cdot\vec{u}\right)=-\vec{\nabla}\cdot\left(p\vec{u}\right)+\vec{\nabla}\cdot\left(\underline{\underline{\tau}}\cdot\vec{u}\right):$$

$$\underline{\underline{T}}=-p\underline{\underline{I}}+\underline{\underline{\tau}}$$

Ρυθμός παραγωγής έργου από το περιβάλλον προς τον ΟΕ μέσω διατμητικών τάσεων και πίεσης ανά μονάδα όγκου
"Ρυθμός διάχυσης μηχανικής ενέργειας"

$$\underline{\underline{\mathbf{I}}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$\mathbf{p}, \underline{\underline{\tau}}$: πίεση, συμμετρικός τανυστής διατμητικών τάσεων

$\vec{\mathbf{g}}=-\vec{\nabla}(\mathbf{gz})$: διάνυσμα βαρύτητας σε διατηρητική μορφή

S: ρυθμός παραγωγής θερμότητας

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{u^2}{2}+gz\right)\right]+\vec{\nabla}\cdot\left[\rho\vec{u}\left(e+\frac{u^2}{2}+gz\right)\right]=-\vec{\nabla}\cdot\vec{q}-\vec{\nabla}\cdot\left(p\vec{u}\right)+\vec{\nabla}\cdot\left(\underline{\underline{\tau}}\cdot\vec{u}\right)+S\rightarrow$$

$$gz\cancel{\frac{\partial\rho}{\partial t}}+\rho\cancelto{0}{\frac{\partial(gz)}{\partial t}}+\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(e+\frac{u^2}{2}\right)+\cancel{\left(e+\frac{u^2}{2}\right)\frac{\partial\rho}{\partial t}}+gz\cancel{\vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{u}\right)}+\rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}(gz)+$$

$$+\rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\left(e+\frac{u^2}{2}\right)+\cancel{\left(e+\frac{u^2}{2}\right)\vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{u}\right)}=-\vec{\nabla}\cdot\vec{q}-\vec{\nabla}\cdot\left(p\vec{u}\right)+\vec{\nabla}\cdot\left(\underline{\underline{\tau}}\cdot\vec{u}\right)+S\rightarrow$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(e+\frac{u^2}{2}\right)+\rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\left(e+\frac{u^2}{2}\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(k\vec{\nabla}T\right)-\vec{\nabla}\cdot\left(p\vec{u}\right)+\vec{\nabla}\cdot\left(\underline{\underline{\tau}}\cdot\vec{u}\right)+\rho\vec{u}\cdot\vec{g}+S\rightarrow$$

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{u^2}{2}\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(k\vec{\nabla}T\right)-\vec{\nabla}\cdot\left(p\vec{u}\right)+\vec{\nabla}\cdot\left(\underline{\underline{\tau}}\cdot\vec{u}\right)+\rho\vec{u}\cdot\vec{g}+S$$

Διαφορική Μορφή Εξίσωσης Διατήρησης
Συνολικής Ενέργειας

$$\rho\frac{D\left(u^2/2+gz\right)}{Dt}=-\vec{\nabla}\cdot\left(p\vec{u}\right)+\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{u}\cdot\underline{\underline{\tau}}\right)+p\vec{\nabla}\cdot\vec{u}-\underline{\underline{\tau}}:\vec{\nabla}\vec{u}$$

Διαφορική Μορφή Εξίσωσης Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας

Απώλειες λόγω Συμπιεστότητας

Σκέδαση μηχανικής ενέργειας

- Η σκέδαση της μηχανικής ενέργειας είναι πάντα θετική π.χ. για Νευτωνικά ρευστά
- Αντιστοιχία με δεύτερο θερμοδυναμικό νόμο

$$\underline{\underline{\tau}}:\vec{\nabla}\vec{u}=\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\mu\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\delta_{ij}\right]\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=$$

$$\frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\delta_{ij}\right]^2>0$$

Ολοκληρωτική Μορφή Εξίσωσης Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας

$$\left.\frac{dE}{dt}\right|_{M\eta\chi}=\frac{d}{dt}\iiint_{CV}\rho\left(\frac{u^2}{2}+gz\right)dV+\oiint_{CS}\rho\left(\frac{u^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}\right)\left(\vec{u}_r\cdot\vec{n}\right)dA=\iiint_{CV}\left(p\vec{\nabla}\cdot\vec{u}-\underline{\underline{\tau}}:\vec{\nabla}\vec{u}\right)dV-$$

$$-\oiint_{CS}p\left(\vec{u}_{CV}\cdot\vec{n}\right)dA+\iiint_{CV}\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{u}\cdot\underline{\underline{\tau}}\right)dV=\iiint_{CV}\left(p\vec{\nabla}\cdot\vec{u}-\underline{\underline{\tau}}:\vec{\nabla}\vec{u}\right)dV+\oiint_{CS}\vec{u}_r\cdot\underline{\underline{\tau}}\cdot\vec{n}dA+\oiint_{CS}\vec{u}_{CV}\cdot\left(-p\underline{\underline{I}}+\underline{\underline{\tau}}\right)\cdot\vec{n}dA\rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\iiint_{CV}\rho\left(\frac{u^2}{2}+gz\right)dV+\oiint_{CS}\rho\left(\frac{u^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}\right)\left(\vec{u}_r\cdot\vec{n}\right)dA=\underbrace{\iiint_{CV}\left(p\vec{\nabla}\cdot\vec{u}-\underline{\underline{\tau}}:\vec{\nabla}\vec{u}\right)dV}_{\dot{W}_l}+\underbrace{\oiint_{CS}\vec{u}_r\cdot\underline{\underline{\tau}}\cdot\vec{n}dA}_{\dot{W}_\tau}+\underbrace{\oiint_{CS}\vec{u}_{CV}\cdot\underline{\underline{T}}\cdot\vec{n}dA}_{\dot{W}_s}$$

$\vec{u}_r=\vec{u}-\vec{u}_{CV}$, $\vec{u}_{CV}$: Ταχύτητα Όγκου Ελέγχου στις Διεπιφάνειες με το Περιβάλον

Έργο Απωλειών

Έργο τριβών στα όρια του συστήματος

Αξονικό Έργο

Εξίσωση Συνολικής Ενέργειας − Εξίσωση Μηχανικής Ενέργειας $\Rightarrow$ $\rho\frac{De}{Dt} = \vec{\nabla}\cdot\left(k\vec{\nabla}T\right) - p\vec{\nabla}\cdot\vec{u} + \underline{\underline{\tau}} : \vec{\nabla}\vec{u} + S$

Εξίσωση Διατήρησης Θερμικής Ενέργειας

Για ασυμπίεστο ρευστό $\mathbf{De = c_v DT}$

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T + \underline{\underline{\tau}} : \vec{\nabla}\vec{u} + S \rightarrow \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_v \vec{u}\cdot\vec{\nabla}T = k\nabla^2 T + \underline{\underline{\tau}} : \vec{\nabla}\vec{u} + S$$

k σταθερό

Για ρευστό σε σταθερή πίεση $De = c_p DT - pD\hat{v}, \quad \hat{v} = \frac{1}{\rho}, \quad \rho\frac{D\hat{v}}{Dt} = \rho\frac{D(1/\rho)}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}$

Συνέχεια $\frac{D\rho}{Dt} + \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0 \rightarrow \rho\frac{D\hat{v}}{Dt} = \vec{\nabla}\cdot\vec{u} \rightarrow$ $\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T + \underline{\underline{\tau}} : \vec{\nabla}\vec{u} + S$

Για συμπιεστό ρευστό $\rho De = \rho c_v DT + \left(-p + T\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_{\hat{v}}\right)\rho D\hat{v} \rightarrow$

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} - p\vec{\nabla}\cdot\vec{u} + T\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_{\hat{v}}\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{q} - p\vec{\nabla}\cdot\vec{u} + \underline{\underline{\tau}} : \vec{\nabla}\vec{u} + S \rightarrow$$

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_v \vec{u}\cdot\vec{\nabla}T = k\nabla^2 T + \underline{\underline{\tau}} : \vec{\nabla}\vec{u} + S - T\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_{\hat{v}}\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$$