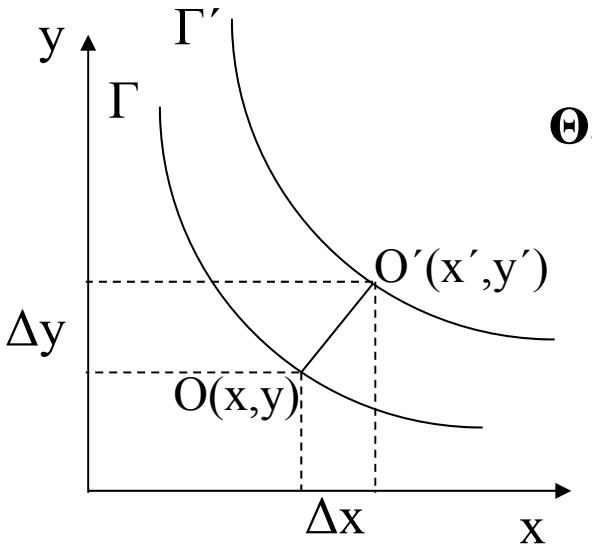
Ταξινόμηση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων

Οιωνεί Γραμμικές Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις 2ης Τάξης

$$a\varphi_{xx} + 2b\varphi_{xy} + c\varphi_{yy} + d\varphi_x + e\varphi_y + f\varphi = g \quad (1)$$

$$a, b, c, d, e, f, g = \Re\left(x, y, \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$$

Για απλότητα έστω: $a\varphi_{xx} + 2b\varphi_{xy} + c\varphi_{yy} = f, \qquad a, b, c, f = \Re\left(x, y, \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$



φ, φ_x, φ_y, γνωστά στην καμπύλη Γ

Θέλουμε να τα βρούμε παντού ξεκινώντας από την Γ

Πρόβλημα Αρχικών Τιμών ?

$$O(x', y') = O(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

$$\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) = \varphi(x, y) + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_O \Delta x + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_O \Delta y + O\left(\Delta x^2, \Delta y^2\right) \quad (2)$$

μέσω της (2) βρίσκουμε την φ στο Ο΄

χρειάζεται να βρούμε και τις φ_x, φ_y στο Ο΄

$$\varphi_x(x + \Delta x, y + \Delta y) = \varphi_x(x, y) + \left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial x}\right|_O \Delta x + \left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right|_O \Delta y + O\left(\Delta x^2, \Delta y^2\right) \quad (3)$$

$$\varphi_y(x + \Delta x, y + \Delta y) = \varphi_y(x, y) + \left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\right|_O \Delta x + \left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial y}\right|_O \Delta y + O\left(\Delta x^2, \Delta y^2\right) \quad (4)$$

Χρειάζονται οι φ_{xx}, φ_{xy}, φ_{yy}, στην Γ

$$(3) \rightarrow d\varphi_x = \varphi_{xx}\big|_O dx + \varphi_{xy}\big|_O dy \quad (5), \qquad (4) \rightarrow d\varphi_y = \varphi_{xy}\big|_O dx + \varphi_{yy}\big|_O dy \quad (6)$$

Οι (1), (5), (6) δίνουν τις φ_{xx}, φ_{xy}, φ_{yy}, αφού οι φ, φ_x, φ_y, είναι γνωστές πάνω στην καμπύλη Γ

$$\begin{bmatrix} a & 2b & c \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{xx} \\ \varphi_{xy} \\ \varphi_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ d\varphi_x \\ d\varphi_y \end{Bmatrix} \qquad (7)$$

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} a & 2b & c \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix}$$

Εάν η ορίζουσα Δ του πίνακα των συντελεστών **M** της (7) είναι διάφορη του 0 τότε για να βρούμε τις φ_{xx}, φ_{xy}, φ_{yy}, πρέπει να έχουμε ανεξάρτητο υπολογισμό των $d\varphi_x$, $d\varphi_y$

Εάν η Δ γίνει μηδέν τότε βρίσκουμε την συγκεκριμένη διεύθυνση ΟΟ΄ στην οποία η μερική διαφορική γίνεται συνήθης

$$\varphi_{xx} = \frac{\begin{vmatrix} f & 2b & c \\ d\varphi_x & dy & 0 \\ d\varphi_y & dx & dy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix}} \qquad \varphi_{xy} = \cdots \qquad \varphi_{yy} = \cdots$$

$$\det M = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$a\,dy^2 - 2b\,dx\,dy + c\,dx\,dx = 0 \xrightarrow{1/dx^2}$$

$$a\frac{d^2y}{dx^2} - 2b\frac{dy}{dx} + c = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \qquad (8)$$

Μέθοδος Χαρακτηριστικών

Για προβλήματα παραβολικού/υπερβολικού τύπου, **b^2-ac≥0**, για να έχει λύση το σύστημα (7) θα πρέπει να μηδενίζεται και η διακρίνουσα του αριθμητή. Π.χ. αν λύνουμε για την φ_{xx} τότε έχουμε:

$$\varphi_{xx} = \frac{\begin{vmatrix} f & 2b & c \\ d\varphi_x & dy & 0 \\ d\varphi_y & dx & dy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix}} = \frac{A}{\Delta}$$

$$\Delta = 0 \rightarrow A = 0 \rightarrow f\,dy^2 - 2b\,d\varphi_x\,dy + c\left(d\varphi_x\,dx - d\varphi_y\,dy\right) = 0 \xrightarrow{1/dx^2}$$

$$f\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\,\frac{d\varphi_x}{dx}\frac{dy}{dx} + c\left(\frac{d\varphi_x}{dx} - \frac{d\varphi_y}{dx}\frac{dy}{dx}\right) = 0 \rightarrow$$

$$\frac{d\varphi_x}{dx}\left(c - 2b\frac{dy}{dx}\right) - c\frac{d\varphi_y}{dx}\frac{dy}{dx} = -f\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \qquad (13)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

Ισχύουν πάνω στις χαρακτηριστικές καμπύλες

$$\frac{d\varphi_x}{dx}\left(c - 2b\frac{dy}{dx}\right) - c\frac{d\varphi_y}{dx}\frac{dy}{dx} = -f\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Παρέχουν τις αναλλοίωτες κατά Riemann

- Επάνω στις χαρακτηριστικές καμπύλες η Μερική Διαφορική Εξίσωση γίνεται Συνήθης και χρειάζεται διακριτοποίηση μόνο σε μία κατεύθυνση κάθε φορά – **Πρόβλημα Αρχικών Τιμών**
- Όταν δεν υπάρχουν χαρακτηριστικές καμπύλες χρειάζεται διακριτοποίηση και των δύο κατευθύνσεων ραυτόχρονα – **Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών**

1. **b^2-ac=0** : **1** χαρακτηριστική καμπύλη, **λ=dy/dx=b/a**,
   Παραβολικό πρόβλημα

2. **b^2-ac>0** : **2** χαρακτηριστικές καμπύλες, **$\lambda_{1,2}$=dy/dx=[b±(b^2-ac)$^{1/2}$]/a**
   Υπερβολικό πρόβλημα

3. **b^2-ac<0** : **Δεν υπάρχουν** χαρακτηριστικές καμπύλες, **Δ≠0**
   Ελλειπτικό πρόβλημα με πλήρη διακριτοποίηση δύο διαστάσεων

Με τον κατάλληλο μετασχηματισμό προκύπτουν οι χαρακτηριστικοί τύποι των ανωτέρω προβλημάτων (π.χ. για γραμμικά προβλήματα)

1. Παραβολικό πρόβλημα: $\begin{matrix} y-\lambda x=\eta \\ x=\xi \end{matrix} \xrightarrow{(1),(8)} \varphi_{\xi\xi}=\Re\left(\varphi,\varphi_\eta,\varphi_\xi,\xi,\eta\right) \quad (9)$

   ή αx+βy=ξ, ή οποιοδήποτε μορφή ώστε η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού (x,y)→(ξ,η) να μην μηδενίζεται.

Κλασσικό παράδειγμα η εξίσωση μεταφοράς θερμότητας $\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Στην περίπτωση αυτή y=t, x=x, η χαρακτηριστική διεύθυνση είναι η dt/dx=0 και συνεπώς σε κάθε δεδομένη χρονική στιγμή, t, διακριτοποιείται η ∂u/∂t=f(u(t),u(t-Δt))=(u(t)-u(t-Δt))/Δt και επιλύεται η συνήθης διαφορική αd^2u/dx^2=f(u(t),u(t-Δt)) διακριτοποιώντας μόνο την x κατεύθυνση

Η διαδικασία συνεχίζεται σε κάθε χρονικό βήμα - Πρόβλημα αρχικών τιμών

2. Ελλειπτικό πρόβλημα

$$\begin{matrix} y-\lambda_1 x=\xi+i\eta \\ y-\lambda_2 x=\xi-i\eta \end{matrix} \xrightarrow{(1),(8)} \varphi_{\xi\xi}+\varphi_{\eta\eta}=\Re\left(\varphi,\varphi_\eta,\varphi_\xi,\xi,\eta\right) \quad (12)$$

Κλασσικά παραδείγματα οι εξισώσεις Laplace και Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=q(x,t)$$

Στην περίπτωση αυτή διακριτοποιούνται ταυτόχρονα και οι δύο διευθύνσεις χωρίς βηματική διαδικασία και έχουμε πρόβλημα συνοριακών τιμών

3. Υπερβολικό πρόβλημα

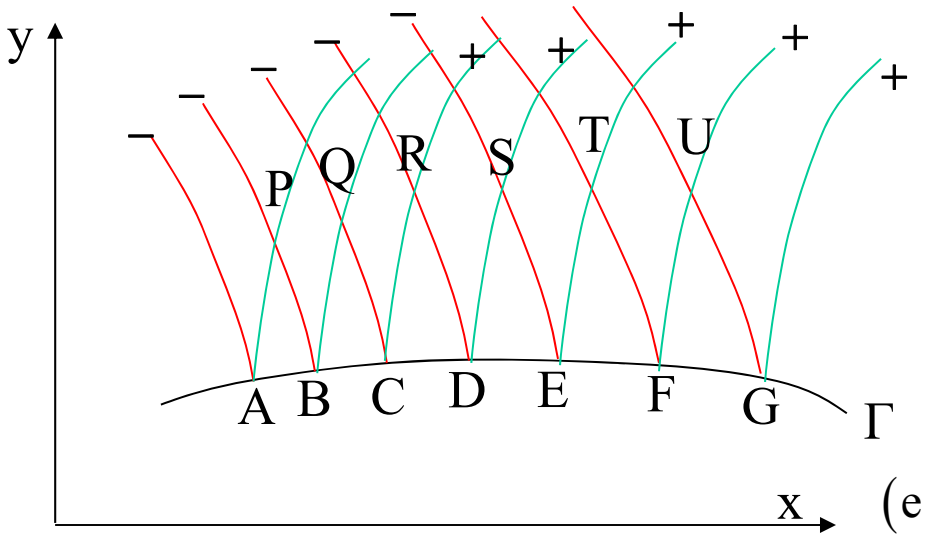
$$\begin{matrix} y-\lambda_1 x=\xi+\eta \\ y-\lambda_2 x=\xi-\eta \end{matrix} \xrightarrow{(1),(8)} \varphi_{\xi\xi}-\varphi_{\eta\eta}=\Re\left(\varphi,\varphi_\eta,\varphi_\xi,\xi,\eta\right) \quad (10)$$

ή εναλλακτικά

$$\begin{matrix} \xi-\eta=z \\ \xi+\eta=\omega \end{matrix} \xrightarrow{(10)} \varphi_{z\omega}=\Re\left(\varphi,\varphi_z,\varphi_\omega,z,\omega\right) \quad (11)$$

Κλασσικό παράδειγμα η κυματική εξίσωση $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$

Εδώ υπάρχουν δύο χαρακτηριστικές καμπύλες και πρέπει να γίνει διακριτοποίηση κατά μήκος και των δύο όπου η μερική διαφορική γίνεται πάλι συνήθης – Πρόβλημα αρχικών τιμών



$$(a): \frac{dy}{dx} = g_+ \qquad (b): \frac{dy}{dx} = g_-$$

$$(c): \frac{d\varphi_x}{dx}\left(c - 2b\,g_+\right) - c\frac{d\varphi_y}{dx}g_+ = -f\,g_+^2$$

$$(d): \frac{d\varphi_x}{dx}\left(c - 2b\,g_-\right) - c\frac{d\varphi_y}{dx}g_- = -f\,g_-^2$$

$$(e): \phi_P = \phi_A + \frac{\phi_{xP} + \phi_{xA}}{2}\left(x_P - x_A\right) + \frac{\phi_{yP} + \phi_{yA}}{2}\left(y_P - y_A\right)$$

1. Για μη γραμμικό υπερβολικό πρόβλημα αρχικά είναι γνωστά τα x, y, φ, φ_x, φ_y, πάνω στα σημεία A, B, C, D…. κοκ. της καμπύλης Γ.

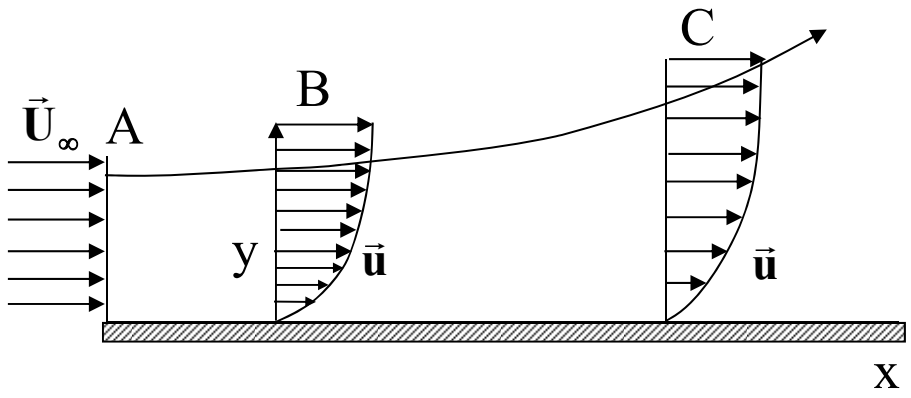
2. Ολοκληρώνουμε τις εξισώσεις (a), (b), (c) και (d) (π.χ. με την Crank-Nicholson) και επιλύουμε για τις τιμές των x, y, φ_x και φ_y στα σημεία P, Q, R, S….. κοκ. όπου συναντώνται οι δύο οικογένειες των χαρακτηριστικών καμπυλών

3. Αφού βρεθούν οι νέες τιμές των x, y, φ_x και φ_y τότε μπορεί να βρεθεί και οτιδήποτε άλλο χρειαστεί, π.χ. η φ με την βοήθεια αναπτύγματος Taylor (διακριτοποίηση της εξίσωσης (2)→ εξίσωση (e)).

4. Η διαδικασία συνεχίζεται για τα επόμενα σημεία τομής των χαρακτηριστικών καμπυλών (ταυτόχρονη κατασκευή των χαρακτηριστικών μαζί με την επίλυση του προβλήματος)

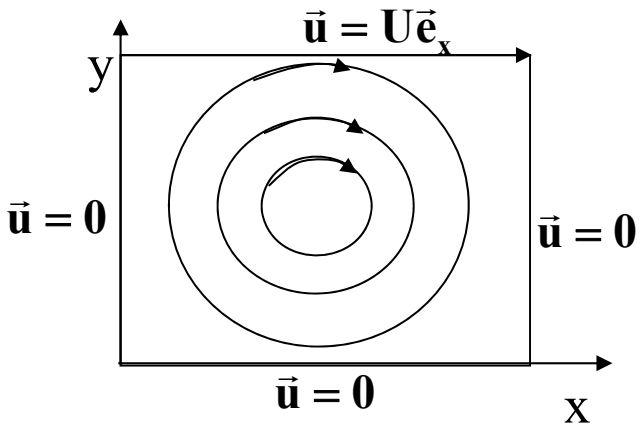
Παραδείγματα Διαφορετικών Τύπων Ροής

1. **Παραβολικό Πρόβλημα**: Ανάπτυξη συνοριακού στρώματος για Re→∞



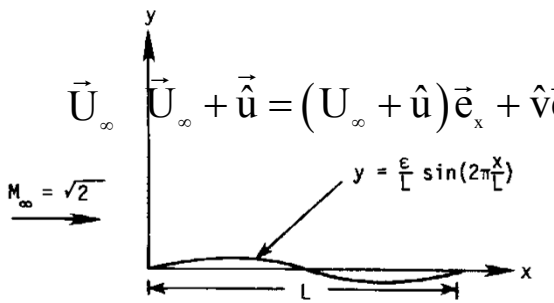
Συνθήκες ροής στο A επηρεάζουν τα B και C και όχι ανάποδα

2. **Ελλειπτικό Πρόβλημα**: Ροή με Ανακυκλοφορία μέσα σε Κοιλότητα

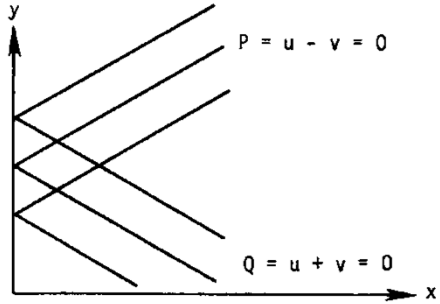


Οποιαδήποτε μεταβολή στις συνοριακές συνθήκες θα επηρεάσει την ροή παντού μέσα στην κοιλότητα

3. Υπερβολικό Πρόβλημα: Ροή γύρω από λεπτό πτερύγιο, πάχος χορδής πολύ μικρότερο του μήκους του L, όταν ο αριθμός Mach=$M_\infty=U_\infty/c>1$, υπερηχητική ροή, ενώ είναι ελλειπτικό για M<1



$$\vec{U}_\infty + \vec{\hat{u}} = \left(U_\infty + \hat{u}\right)\vec{e}_x + \hat{v}\vec{e}_y$$

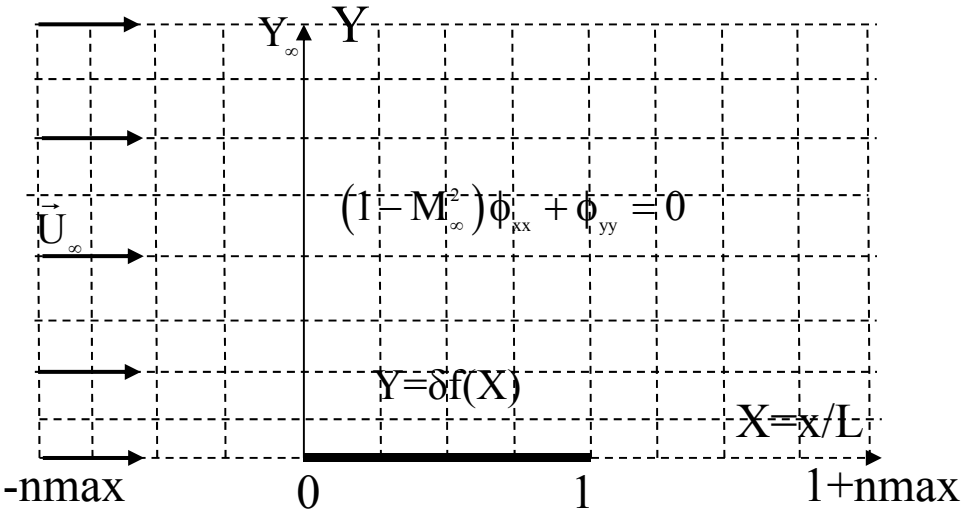


Οποιαδήποτε μεταβολή στις συνθήκες ροής σε ένα σημείο επηρεάζει την ροή σε ένα τόξο που ορίζεται από τις δύο χαρακτηριστικές καμπύλες

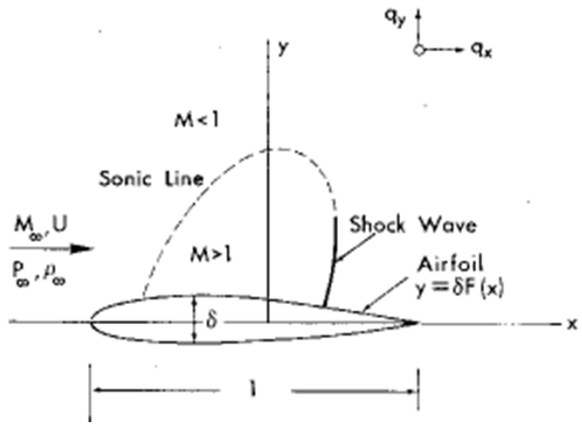
Οι χαρακτηριστικές ευθείες προκύπτουν από την κυματική εξίσωση

$$\phi_{yy} - \left(M_\infty^2 - 1\right)\phi_{xx} = 0$$

$$\frac{\hat{u}}{U_\infty} = \delta u, \quad \frac{\hat{v}}{U_\infty} = \delta v, \quad \frac{\varepsilon}{L} \equiv \delta << 1 \quad u = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y}$$



Όταν $M_\infty<1$ η ροή είναι υποηχητική και το πρόβλημα γίνεται ελλειπτικό με ανάντη επίδραση



Όταν M_∞~1 η ροή είναι διηχητική και το πρόβλημα γίνεται μη γραμμικό και είναι δυνατή η δημιουργία κρουστικών κυμάτων

Murman & Cole 1971

Επίλυση Διδιάστατης Κυματικής για M>1 με Μέθοδο Χαρακτηριστικών

Για $M_\infty>1$ η κυματική εξίσωση παίρνει εν γένει την μορφή $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$ με χαρακτηριστική εξίσωση $dy/dx = \pm c$ και f=0, οπότε οι αναλλοίωτες κατά Riemann παίρνουν την μορφή

$$\frac{d\varphi_x}{dx}\left(c - 2b\frac{dy}{dx}\right) - c\frac{d\varphi_y}{dx}\frac{dy}{dx} = -f\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \xrightarrow{f=0} \frac{d\phi_x}{dx} \pm c\frac{d\phi_y}{dx} = 0 \quad \text{όπου} \quad c = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1}{M_\infty^2 - 1}},$$

Έτσι αν θέσουμε $\vec{u}/U_\infty \to \delta\vec{u}$ όπου $\vec{\nabla}\phi = \vec{u}$ με $u = \phi_x$, $v = \phi_y$ πάνω στις δύο χαρακτηριστικές που ταυτοποιούνται από την κλίση ±c, π.χ. για $M_\infty = \sqrt{2} \to c = 1$, ισχύει ότι u±cv=constant και

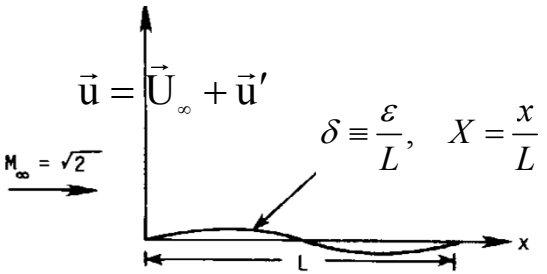
χαρακτηριστική για +c: $u - cv = P = \text{constant}$
χαρακτηριστική για -c: $u + cv = Q = \text{constant}$
$\to$ Στα σημεία τομής τους ισχύει: $u = (P+Q)/2$, $v = (Q-P)/(2c)$ (1)

- Έτσι σε κάθε σημείο του πεδίου ροής υπολογίζεται η ταχύτητα αν γνωρίζουμε τα P και Q, τα οποία όμως μεταφέρονται αναλλοίωτα πάνω στις αντίστοιχες χαρακτηριστικές ευθείες
- Για λεπτό πτερύγιο γνωστού σχήματος, y=δf(x) σε αδιάστατες μεταβλητές, η διαταραχή της κάθετης αδιάστατης ταχύτητας στην επιφάνειά του λόγω του πτερυγίου είναι γνωστή v=dφ/dy(y=0)=df/dx, αν δ=ε/L, y=y'/L, x=x'/L, με L το μήκος και ε χαρακτηριστικό πάχος του πτερυγίου
- Αν η διαταραχή της ταχύτητας στην είσοδο, x=0, και μακριά από το πτερύγιο, y→∞ είναι 0 τότε P=Q=0 στις θέσεις αυτές και ακολουθώντας την χαρακτηριστική με αρνητική κλίση, -c, μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα u σε οποιαδήποτε θέση στο πτερύγιο, όπου ξέρουμε την v=df/dx, μέσω της αναλλοίωτης Q=0=u+cv→u=-cv και συνεπώς την τιμή της αναλλοίωτης P=-2cv στο ίδιο σημείο
- Κατόπιν η τιμή της ταχύτητας σε οποιοδήποτε σημείο μέσα στο πεδίο ροής βρίσκεται θεωρώντας την τομή μίας χαρακτηριστικής με αρνητική κλίση και Q=0 που ξεκινάει από το επίπεδο εισόδου, x=0, με μία θετική χαρακτηριστική P που ξεκινάει από το πτερύγιο, y=0, μέσω της παραπάνω σχέσης (1)

(περισσότερα στοιχεία στο βιβλίο των Anderson, Tannehill & Pletcher)

Ανάλυση Δυναμικής Ροής γύρω από Λεπτό Εμπόδιο

$$\frac{y}{L} = Y = \frac{\varepsilon}{L}\sin\left(2\pi\frac{x}{L}\right)$$



- Θέλουμε να μελετήσουμε την ανοικτή ροή αερίου, εν γένει συμπιεστού, γύρω από διδιάστατο λεπτό εμπόδιο μήκους L και πάχους ε ώστε ε/L=δ<<1
- Απουσία του εμποδίου η ροή είναι ευθύγραμμη και ομοιόμορφη $\vec{U}_\infty = U_\infty \vec{e}_x$ και θέλουμε να βρούμε την διαταραχή που θα επιφέρει στο ροϊκό πεδίο η παρουσία του εμποδίου $\vec{u} = \vec{U}_\infty + \vec{u}' = \vec{e}_x\left(U_\infty + u'\right) + \vec{e}_y v'$

Θεωρούμε ανιξώδη ροή ιδανικού αερίου με μικρές υψομετρικές διαφορές και παραγωγή ή μεταφορά θερμότητας, $\dot{Q} = 0, \quad p = \wp + \rho g z \xrightarrow[\vec{g} = -g\vec{e}_z]{\vec{z} = z\vec{e}_z} -\vec{\nabla} p = -\vec{\nabla}\wp + \vec{\nabla}\left(\rho\vec{g}\cdot\vec{z}\right)$ οπότε ισχύουν οι διαφορικές εξισώσεις Euler :

Συνέχεια: $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{u}\right) = 0 \quad (1)$

Ορμή: $\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u} = -\vec{\nabla}p \quad (2)$

Συντηρητική μορφή ορμής: $\vec{u}(1) + (2) \rightarrow \frac{\partial\left(\rho\vec{u}\right)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{u}\vec{u} + p\right) = 0 \quad (3)$

Ενέργεια: $\rho\frac{D\left(e + q^2/2\right)}{Dt} = \rho\frac{\partial\left(e + q^2/2\right)}{\partial t} + \rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\left(e + q^2/2\right) = -\vec{\nabla}\left(p\vec{u}\right) \quad (4) \qquad q \equiv \|\vec{u}\| = \sqrt{u^2 + v^2}$

Συντηρητική μορφή ενέργειας: $\left(e + q^2/2\right)(1) + (4) \rightarrow \frac{\partial\left[\rho\left(e + q^2/2\right)\right]}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left[\rho\left(e + q^2/2 + p/\rho\right)\vec{u}\right] = 0 \quad (5)$

Καταστατικός νόμος τελείων αερίων: $p = \rho RT \quad (6)$

Θεωρώντας διδιάστατη ροή έχουμε:

Συνέχεια: $\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0 \quad (7)$

Συντηρητική μορφή x ορμής: $\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho u^2+p\right)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u v)}{\partial y}=0 \quad (8)$

Συντηρητική μορφή y ορμής: $\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u v)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\rho v^2+p\right)}{\partial y}=0 \quad (9)$

Συντηρητική μορφή ενέργειας: $\frac{\partial\left[\rho\left(e+q^2/2\right)\right]}{\partial t}+\frac{\partial\left[\rho u\left(h+q^2/2\right)\right]}{\partial x}+\frac{\partial\left[\rho v\left(h+q^2/2\right)\right]}{\partial y}=0 \quad (10)$

Συνοπτικά έχουμε την παρακάτω μορφοποίηση των εξισώσεων Euler

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{t}}+\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{x}}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}=0 \quad \text{όπου} \quad \mathbf{U}\equiv\begin{bmatrix}\rho\\ \rho\mathbf{u}\\ \rho\mathbf{v}\\ \rho\left(\mathbf{e}+\mathbf{q}^2/2\right)\end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}\equiv\begin{bmatrix}\rho\mathbf{u}\\ \rho\mathbf{u}^2+\mathbf{p}\\ \rho\mathbf{uv}\\ \rho\mathbf{u}\left(\mathbf{h}+\mathbf{q}^2/2\right)\end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}\equiv\begin{bmatrix}\rho\mathbf{v}\\ \rho\mathbf{uv}\\ \rho\mathbf{v}^2+\mathbf{p}\\ \rho\mathbf{v}\left(\mathbf{h}+\mathbf{q}^2/2\right)\end{bmatrix} \quad (11)$$

Ισχύουν για ιδανική ροή - Αμελητέα αναντίστρεπτη ιξώδης σκέδαση ενέργειας ενώ επιτρέπεται η αντιστρεπτή θερμομηχανική αλληλεπίδραση μέσω της συμπιεστότητας

Θεωρούμε μόνιμη κατάσταση και έχουμε ολοκληρώνοντας την ορμή κατά μήκος μίας ροϊκής γραμμής, όπου $d\vec{s}$ στοιχειώδης μετατόπιση πάνω στην ροϊκή γραμμή

$$(2)\cdot d\vec{s} \rightarrow \left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u}\right)\cdot d\vec{s} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho}\cdot d\vec{s} \rightarrow u_s\frac{\partial\vec{u}}{\partial s}\cdot\vec{e}_s ds = -\frac{\vec{\nabla}p\cdot\vec{e}_s}{\rho}ds \rightarrow$$

$$u_s\frac{\partial\left(\vec{u}\cdot\vec{e}_s\right)}{\partial s} - u_s\vec{u}\cdot\frac{\partial\vec{e}_s}{\partial s} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds} \rightarrow \frac{1}{2}\frac{du_s^2}{ds} - u_s\vec{u}\cdot\frac{\vec{n}}{R} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds} \xrightarrow[\text{R: καμπυλότητα}]{\vec{u}\cdot\vec{n}=0} \frac{1}{2}\frac{du_s^2}{ds} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds} = 0 \quad (13\alpha)$$

$\vec{n}$: κάθετο διάνυσμα πάνω στην ροική γραμμή, R : καμπυλότητα ροικής γραμμής

Η 13α ισχύει σε κάθε κατεύθυνση για αστρόβιλη ροή και μπορούμε να γράψουμε σε διαφορική μορφή

$$\frac{d\left(q^2\right)}{2} = -\frac{dp}{\rho} \rightarrow qdq = -\frac{dp}{\rho} \rightarrow dp = -\rho qdq \xrightarrow[\text{Διεργασία}]{\text{Ισεντροπική}} \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{qdq}{a^2} = -\frac{1}{a^2}\frac{dq^2}{2} = -\frac{1}{a^2}d\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right) \rightarrow$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{-\rho}{a^2}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial\rho}{\partial y} = \frac{-\rho}{a^2}\left(u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (14\alpha,\beta)$$

Ταυτόχρονα ισχύει η συνέχεια σε 2d και μόνιμη κατάσταση $\rho\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} = 0 \quad (15)$

$$(15) \xrightarrow{(14\alpha,\beta)} \frac{\partial u}{\partial x}\left[1-\frac{u^2}{a^2}\right] + \frac{\partial v}{\partial y}\left[1-\frac{v^2}{a^2}\right] - \frac{uv}{a^2}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right] = 0 \quad (16)$$

Εξίσωση Euler για ιδανική, αστρόβιλη και ισεντροπική ροή

Θερμοδυναμικές σχέσεις Gibbs για αντιστρεπτή διεργασία: $Tds = dq \xrightarrow[h=e+p\upsilon]{1ος\ ΘΝ} Tds = \begin{matrix} de + pd\upsilon \\ dh - \upsilon dp \end{matrix} \rightarrow$

$$e = e(\upsilon, T), \quad h = h(p, T) \qquad \begin{matrix} de = c_\upsilon dT - \left[T \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_\upsilon - p \right] d\upsilon \\ dh = c_p dT - \left[\upsilon - T \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial T}\right|_p \right] dp \end{matrix}$$

Καταστατικός νόμος τελείων αερίων: $\begin{matrix} p = \rho RT \\ p\upsilon = RT \end{matrix}$

$$e = e(T), h = h(T), \begin{matrix} de = c_\upsilon dT \\ dh = c_p dT \end{matrix} \xrightarrow{h=e+p\upsilon} c_p = c_\upsilon + R \xrightarrow[ds=0]{\textbf{Ισεντροπική διεργασία}} dh = \upsilon dp \rightarrow c_p dT = \frac{RT}{p} dp$$

$$\xrightarrow[c_p/R=\gamma/(\gamma-1)]{c_p/c_\upsilon=\gamma} \frac{c_p}{R}\frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} \rightarrow \frac{\gamma}{\gamma-1} d\ln T = d\ln p \rightarrow T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = Cp \quad \begin{matrix} \frac{p}{T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = \mathrm{C}_1 \\ \frac{p}{\rho^\gamma} = \mathrm{C}_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \mathrm{e}=c_v T = \frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} \\ \mathrm{h}=c_p T = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} \end{matrix} \quad (17\alpha)$$

Ταχύτητα του ήχου $\mathrm{a}=\sqrt{\frac{dp}{d\rho_s}} = \sqrt{\gamma\rho^{\gamma-1}C_2} = \sqrt{\gamma\frac{p}{C_2\rho}C_2} = \sqrt{\gamma\frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma RT} \quad (17\beta)$

Για βαροτροπική ροή ισχύει ότι p=p(ρ). Εάν επί πλέον έχουμε ισεντροπική ροή ιδανικού αερίου με χρήση του 1ου θερμοδυναμικού νόμου προκύπτει ότι

$$\rho / \rho_\infty = \left(p / p_\infty\right)^{1/\gamma} \ (17\alpha), \text{ το } \infty \text{ συμβολίζει συνθήκες στο επερχόμενο ρεύμα}$$

$$\text{και } \gamma \equiv \frac{c_p}{c_\upsilon} \approx 1.4 \text{ πολυτροπική σταθερά}$$

Αντικαθιστώντας στην (13α) και ολοκληρώνοντας κατά s παίρνουμε

$$\int_\infty^s \frac{1}{2}\frac{du_s^2}{ds}ds + \frac{p_\infty^{1/\gamma}}{\rho_\infty}\int_\infty^s \frac{1}{p^{1/\gamma}}\frac{dp}{ds}ds = 0 \rightarrow \frac{u_s^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} = \frac{U_\infty^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_\infty}{\rho_\infty} \quad (18\alpha)$$

- Η παραπάνω σχέση ισχύει πάνω σε μία ροική γραμμή ιδανικού αερίου, ενώ εάν η ροή είναι αστρόβιλη ισχύει παντού στο πεδίο ροής $\frac{q^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} = \frac{U_\infty^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_\infty}{\rho_\infty} \quad (18\beta)$

  Η εξ. (18β) είναι η εξίσωση Bernoulli για το ιδανικό αέριο και μπορεί επίσης να παραχθεί με βάση το ισοζύγιο ενέργειας
- Επίσης για ισεντροπική ροή ιδανικού αερίου ισχύει η (17β) για την ταχύτητα του ήχου στο κινούμενο αέριο ως: $a^2 = \left.\frac{dp}{d\rho}\right|_s = \gamma RT = \gamma\frac{p}{\rho}$

Θεωρώντας πολύ λεπτό πτερύγιο διερευνούμε την επίδραση του λόγου όψεως δ=ε/L στην ροή γύρω από το πτερύγιο, εισάγοντας μικρές μεταβολές στα πεδία που χαρακτηρίζουν το πεδίο ροής μακριά από το πτερύγιο, οι οποίες συμβολίζονται με τονισμένες ποσότητες:

$$u = U_\infty + u', \quad v = v', \quad p = p_\infty + p', \quad \rho = \rho_\infty + \rho', \quad a = a_\infty + a'$$

- Οι τονισμένες ποσότητες είναι μικρότερες από αυτές του ελεύθερου ρεύματος, π.χ. $u' \ll U_\infty$
- Με βάση τις παραπάνω σχέσεις εκφράζουμε τις τονισμένες μεταβλητές σαν συνάρτηση των αντίστοιχων μεταβολών του πεδίου ταχυτήτων
- Από τον νόμο ιδανικών αερίων, εξ. (13β), έχουμε:

$$\left(\frac{\rho_\infty + \rho'}{\rho_\infty}\right) = \left(\frac{p_\infty + p'}{p_\infty}\right)^{1/\gamma} \to 1 + \frac{\rho'}{\rho_\infty} = 1 + \frac{1}{\gamma}\frac{p'}{p_\infty} + O\left(\frac{p'}{p_\infty}\right)^2 \to \frac{\rho'}{\rho_\infty} = \frac{1}{\gamma}\frac{p'}{p_\infty} \quad (19\alpha)$$

Για την ταχύτητα του ήχου έχουμε με βάση την εξ. (17β) για ιδανικό αέριο

$$a^2 = \left.\frac{dp}{d\rho}\right|_s = \frac{\gamma p}{\rho} \to \left(a_\infty + a'\right)^2 = \gamma\frac{p_\infty + p'}{\rho_\infty + \rho'} \to a_\infty^2 + 2a_\infty a' + a'^2 = \gamma\frac{p_\infty}{\rho_\infty}\frac{1 + p'/p_\infty}{1 + \rho'/\rho_\infty} \to$$

$$a_\infty^2 + 2a_\infty a' + O\left(a'^2\right) = \gamma\frac{p_\infty}{\rho_\infty}\left(1 + \frac{p'}{p_\infty}\right)\left(1 - \frac{\rho'}{\rho_\infty} + O\left(\frac{\rho'}{\rho_\infty}\right)^2\right) \to 2a_\infty a' = \gamma\frac{p_\infty}{\rho_\infty}\left(\frac{p'}{p_\infty} - \frac{\rho'}{\rho_\infty}\right) \xrightarrow{19\alpha}$$

$$2a_\infty a' = \gamma\frac{p_\infty}{\rho_\infty}(\gamma - 1)\frac{\rho'}{\rho_\infty} \xrightarrow[\gamma p_\infty/\rho_\infty = a_\infty^2]{M_\infty^2 = u_\infty^2/a_\infty^2} \frac{a'}{a_\infty} = \frac{\gamma - 1}{2}\frac{\rho'}{\rho_\infty} \quad (19\beta)$$

Ανάλογα από την εξ. Bernoulli (18β) παίρνουμε, αγνοώντας τα γινόμενα μικρών αριθμών ,

$$\frac{v'^2+\left(U_\infty+u'\right)^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_\infty+p'}{\rho_\infty+\rho'}=\frac{U_\infty^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_\infty}{\rho_\infty}\rightarrow\frac{U_\infty^2}{2}\left(1+2\frac{u'}{U_\infty}+\frac{u'^2+v'^2}{U_\infty^2}\right)+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_\infty}{\rho_\infty}\frac{1+p'/p_\infty}{1+\rho'/\rho_\infty}=\frac{U_\infty^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_\infty}{\rho_\infty}$$

$$\rightarrow\frac{U_\infty^2}{2}+U_\infty u'+O\left(\frac{u'^2}{U_\infty^2}\right)+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_\infty}{\rho_\infty}\left(1+\frac{p'}{p_\infty}\right)\left(1-\frac{\rho'}{\rho_\infty}+O\left(\frac{\rho'}{\rho_\infty}\right)^2\right)=\frac{U_\infty^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_\infty}{\rho_\infty}\rightarrow$$

$$U_\infty u'+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_\infty}{\rho_\infty}\left(\frac{p'}{p_\infty}-\frac{\rho'}{\rho_\infty}\right)+O\left(u'^2\right)=0\xrightarrow{\text{Εξ}(19\alpha)}U_\infty u'+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_\infty}{\rho_\infty}\left[\gamma\frac{\rho'}{\rho_\infty}-\frac{\rho'}{\rho_\infty}\right]=0\rightarrow$$

$$U_\infty u'+\frac{\gamma(\gamma-1)}{\gamma-1}\frac{p_\infty}{\rho_\infty}\frac{\rho'}{\rho_\infty}=0\rightarrow\frac{\rho'}{\rho_\infty}=-\frac{\rho_\infty U_\infty u'}{\gamma p_\infty}=-M_\infty^2\frac{u'}{U_\infty}\qquad\xrightarrow{\text{Εξ}(19\alpha)}\frac{p'}{p_\infty}=-\gamma M_\infty^2\frac{u'}{U_\infty}\qquad(19\gamma,\delta)$$

Αντικαθιστώντας στην ταχύτητα του ήχου προκύπτει ότι $\frac{a'}{a_\infty}=-\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\frac{u'}{U_\infty}\qquad(19\varepsilon)$

Γραμμικοποιώντας την (16) με βάση τις παραπάνω σχέσεις και αγνοώντας όρους ανώτερης τάξης έχουμε

$$(16)\xrightarrow[\frac{\partial v'}{\partial x}\equiv v'_x\ \frac{\partial v'}{\partial y}\equiv v'_y]{\frac{\partial u'}{\partial x}\equiv u'_x\ \frac{\partial u'}{\partial y}\equiv u'_y} u'_x\left[1-\frac{u_\infty^2\left(1+2\frac{u'}{U_\infty}\right)}{a_\infty^2\left[1-(\gamma-1)M_\infty^2\frac{u'}{U_\infty}\right]}\right]+v'_y\left[1-\frac{v'^2}{a_\infty^2\left[1-(\gamma-1)M_\infty^2\frac{u'}{U_\infty}\right]}\right]-$$

$$\frac{v'U_\infty\left(1+\frac{u'}{U_\infty}\right)}{a_\infty^2\left[1-(\gamma-1)M_\infty^2\frac{u'}{U_\infty}\right]}\left[u'_y+v'_x\right]=0\rightarrow u'_x\left[1-M_\infty^2\left(1+\frac{2u'}{U_\infty}\right)\left[1+(\gamma-1)M_\infty^2\frac{u'}{U_\infty}\right]\right]+v'_y+O(v'^2)=0$$

$$u'_x\left[1-M_\infty^2-\frac{2u'}{U_\infty}M_\infty^2-(\gamma-1)M_\infty^4\frac{u'}{U_\infty}\right]+v'_y=0\rightarrow M_\infty^2u'_x\left[\frac{1-M_\infty^2}{M_\infty^2}-\frac{u'}{U_\infty}\left[2+(\gamma-1)M_\infty^2\right]\right]+v'_y=0$$

Για αστρόβιλη ροή ορίζουμε συνάρτηση δυναμικού $\vec{u}=\vec{\nabla}\Phi\rightarrow\Phi=U_\infty x+\phi'$ και παίρνουμε

$$M_\infty^2\phi'_{xx}\left[\frac{1-M_\infty^2}{M_\infty^2}-\frac{\phi'_x}{U_\infty}\left[2+(\gamma-1)M_\infty^2\right]\right]+\phi'_{yy}=0\xrightarrow[\text{Διηχητική ροή}]{M_\infty^2\sim1,\ \frac{u'}{U_\infty}\sim1-M_\infty^2}M_\infty^2\phi'_{xx}\left[\frac{1-M_\infty^2}{M_\infty^2}-\frac{\phi'_x}{U_\infty}(\gamma+1)\right]+\phi'_{yy}=0$$

$$M_\infty<1\xrightarrow[\text{Ελλειπτικό πρόβλημα}]{\text{Υποηχητική ροή}}\phi'_{xx}+\frac{1}{1-M_\infty^2}\phi'_{yy}=0\qquad M_\infty>1\xrightarrow[\text{Υπερβολικό πρόβλημα}]{\text{Υπερηχητική ροή}}\phi'_{xx}-\frac{1}{M_\infty^2-1}\phi'_{yy}=0$$

Για την επίλυση του προβλήματος διηχητικής ροής εισάγονται νέες αδιάστατες μεταβλητές που σχετίζονται με το αδιάστατο πάχος δ=ε/L <<1 του πτερυγίου, έτσι ώστε να συνυπάρχουν στην σχέση που καθορίζει το δυναμικό ταχύτητας φ και οι μη γραμμικοί όροι που θα δώσουν την δυνατότητα υπολογισμού κρουστικών κυμάτων Murman Cole (1971)

$$\bar{y} = \frac{y}{L\delta^{-1/3}}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \qquad \frac{\delta^{2/3} L U_\infty}{L^2}\bar{\phi}_{\bar{x}\bar{x}}\left[\left(1-M_\infty^2\right) - \frac{M_\infty^2}{U_\infty}\frac{L U_\infty \delta^{2/3}}{L}\bar{\phi}_{\bar{x}}\left(1+\gamma\right)\right] + \frac{L U_\infty \delta^{2/3}}{L^2\delta^{-2/3}}\bar{\phi}_{\bar{y}\bar{y}} \xrightarrow{M_\infty^2 \sim 1}$$

$$\bar{\phi} = \frac{\phi}{L U_\infty \delta^{2/3}}, \qquad \bar{\phi}_{\bar{x}\bar{x}}\left[\frac{1-M_\infty^2}{\delta^{2/3}} - \bar{\phi}_{\bar{x}}\left(1+\gamma\right)\right] + \bar{\phi}_{\bar{y}\bar{y}} = 0 \xrightarrow[K=O(1)]{\frac{1-M_\infty^2}{\delta^{2/3}}} \bar{\phi}_{\bar{x}\bar{x}}\left[K - \bar{\phi}_{\bar{x}}\left(1+\gamma\right)\right] + \bar{\phi}_{\bar{y}\bar{y}}$$

Η αδιάστατη απόσταση από τον άξονα του πτερυγίου, $\bar{y} = y/(L\delta^{-1/3})$, που εισάγεται θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από το πάχος του ιξώδους συνοριακού στρώματος, $L\,\mathrm{Re}^{-1/2}$, και μικρότερη από το μήκος του πτερυγίου L ώστε να μπορούμε να αγνοήσουμε την ιξώδη αλληλεπίδραση με το τοίχωμα

Για την επίλυση των περιπτώσεων υπο και υπερηχητικής ροής χρησιμοποιούμε την κλασσική αδιαστατοποίηση

$$Y = \frac{y}{L}, \quad X = \frac{x}{L}, \quad \frac{\varphi'}{L U_\infty} = \phi = \frac{\varepsilon}{L}\bar{\phi}, \quad \frac{\vec{u}'}{U_\infty} = \frac{\varepsilon}{L}\vec{\bar{u}} = \frac{\varepsilon}{L}\vec{\nabla}\phi, \qquad \text{η οποία δίνει} \qquad \left(1-\mathrm{M}_\infty^2\right)\frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial \mathrm{X}^2} + \frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial \mathrm{Y}^2} = 0$$

Το πρόβλημα αυτό ορίζεται στον ημιάπειρο χώρο $-\infty \le x \le \infty, \quad 0 \le y \le \infty,$ και το λεπτό πτερύγιο θεωρείται ότι εκτείνεται στον θετικό ημιάξονα 0≤x/L ≤1, y=0. Παράλληλα, υποθέτουμε συμμετρικό εμπόδιο οπότε επιλύουμε στον θετικό ημιάξονα των y. Μακριά από το πτερύγιο η ροή είναι αδιατάρακτη ενώ επάνω στο πτερύγιο η κάθετη ταχύτητα μηδενίζεται. Έτσι εισάγοντας το σχήμα της διεπιφάνειας y=f(x) και αδιαστατοποιώντας ανάλογα: y/L=Y=f(x)/L=F(x/L)= $\delta \bar{f}(X)$ παίρνουμε

$$u_n\Big|_{y=f(x)} = 0 \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{n} = \left(U_\infty \vec{e}_x + \vec{u}'\right)\cdot\left(\frac{\vec{e}_y - f_x\vec{e}_x}{\sqrt{1+f_x^2}}\right)\Bigg|_{y=\varepsilon\bar{f}} = 0 \xrightarrow[u'=\delta\bar{u},\, v'=\delta\bar{v}]{\vec{u}'=u'\vec{e}_x+v'\vec{e}_y} \frac{-(U_\infty + U_\infty\delta\bar{u})\delta\frac{L}{L}\bar{f}_X + \delta U_\infty \bar{v}}{\sqrt{1+\delta^2\frac{L^2}{L^2}\bar{f}_X^2}\approx 1} = 0$$

$$\xrightarrow{\bar{f}_X \equiv \frac{d\bar{f}}{dX}} \bar{v}\Big|_{Y=0} - \bar{f}_X = O(\delta) \rightarrow \frac{d\bar{\phi}}{dY}\Bigg|_{Y=0} \approx \bar{f}_X$$

Όπου αγνοούμε όρους τάξης δ^2 και πάνω

Τελικά το πρόβλημα σε αδιάστατη μορφή στην ελλειπτική και υπερβολική του εκδοχή παίρνει την μορφή

Ελλειπτική $M_\infty^2 < 1$: $\dfrac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial X^2} + \dfrac{1}{1-M_\infty^2}\dfrac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial Y^2} = 0$

$$\bar{\phi}\left(X \rightarrow \pm\infty, Y\right) = \bar{\phi}\left(X, Y \rightarrow \infty\right) = 0$$

$$0 < X < 1 \quad \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial Y}\Bigg|_{Y=0} = \frac{d\bar{f}}{dX} \qquad X < 0, \quad X > 1, \quad \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial Y}\Bigg|_{Y=0} = 0,$$

Υπερβολική $M_\infty^2 > 1$: $\dfrac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial X^2} - \dfrac{1}{M_\infty^2 - 1}\dfrac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial Y^2} = 0$

$$\bar{\phi}\left(X = 0, Y\right) = \bar{\phi}\left(X, Y \rightarrow \infty\right) = 0$$

$$0 < X < 1 \quad \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial Y}\Bigg|_{Y=0} = \frac{d\bar{f}}{dX}, \qquad X > 1 \quad \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial Y}\Bigg|_{Y=0} = 0,$$

Υπολογισμός ροϊκής συνάρτησης : Για τον υπολογισμό της ροϊκής συνάρτησης έχουμε ξεκινώντας από την εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0 \xrightarrow[\text{Συνάρτηση}]{\Psi\text{: Ροϊκή}} \frac{\partial\Psi}{\partial y}=\rho u,\quad \frac{\partial\Psi}{\partial x}=-\rho v,\quad \Psi\equiv\rho_\infty U_\infty y+\psi',\quad \frac{\psi'}{\rho_\infty U_\infty L}\equiv\psi\equiv\frac{\varepsilon}{L}\bar{\psi},\quad \frac{\varepsilon}{L}\equiv\delta$$

$$u=U_\infty+u',\quad \frac{u'}{U_\infty}\equiv\frac{\varepsilon}{L}\bar{u},\quad \frac{v'}{U_\infty}\equiv\frac{\varepsilon}{L}\bar{v},\quad \rho\equiv\rho_\infty+\rho',\quad \frac{\rho'}{\rho_\infty}=\frac{\varepsilon}{L}\bar{\rho}\quad\rightarrow\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial Y}=\bar{u},\quad \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial X}=-\bar{v}$$

Ακολούθως, λαμβάνοντας υπόψη ότι το λειτουργούν μέσο είναι ιδανικό αέριο και κάνοντας χρήση της αστρόβιλης εξίσωσης ορμής, προκύπτει ότι για μικρές διαταραχές οι οποίες χαρακτηρίζονται από δ<<1,

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y}=\rho u\rightarrow\Psi=C(x)+\int_0^y\rho u dy\rightarrow\Psi=C(x)+\int_0^y\rho_\infty\left(1+\delta\bar{\rho}\right)U_\infty\left(1+\delta\bar{u}\right)dy\rightarrow$$

$$\Psi=C(x)+\rho_\infty U_\infty\int_0^y\left[1+\delta\left(\bar{\rho}+\bar{u}\right)+O\left(\delta^2\right)\right]dy\xrightarrow{\text{Εξ (19γ)}}\Psi\approx C(x)+\rho_\infty U_\infty\int_0^y\left[1+\delta\left(1-M_\infty^2\right)\bar{u}\right]dy\rightarrow$$

$$\Psi=C(x)+\rho_\infty U_\infty y+\rho_\infty U_\infty\int_0^y\delta\left(1-M_\infty^2\right)\bar{u}dy=\rho_\infty U_\infty y+\rho_\infty U_\infty\delta\bar{\psi}$$

Όμως $\lim\limits_{y\to\infty}\Psi=\rho_\infty U_\infty y\rightarrow C(x)=-\rho_\infty U_\infty\int_0^{y_\infty}\delta\left(1-M_\infty^2\right)\bar{u}dy\xrightarrow{Y\equiv\frac{y}{L}}\frac{\Psi(x,y)}{\rho_\infty U_\infty L}=Y+\delta\left(1-M_\infty^2\right)\left[\int_0^Y\bar{u}dY-\int_0^{Y_\infty}\bar{u}dY\right]$

$$\rightarrow\frac{\Psi(x,y)}{\rho_\infty U_\infty L}-Y=\delta\bar{\psi}=-\delta\left(1-M_\infty^2\right)\int_Y^{Y_\infty}\bar{u}dY=-\delta\left(1-M_\infty^2\right)\int_Y^{Y_\infty}\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial X}dY\rightarrow\ \bar{\psi}=-\left(1-M_\infty^2\right)\int_Y^{Y_\infty}\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial X}dY$$

και $\frac{\Psi(x,y)}{\rho_\infty U_\infty L}=\mathrm{Y}-\delta\left(1-M_\infty^2\right)\int_Y^{Y_\infty}\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial X}dY$ όπου $\frac{\phi'}{U_\infty L}\equiv\phi=\delta\bar{\phi}$ με $\vec{\bar{u}}=\vec{\nabla}\bar{\phi}$

Η τελευταία σχέση

- Χρησιμοποιείται μετά τον υπολογισμό της συνάρτησης δυναμικού σε όλο το πεδίο ροής
- Ισχύει για το ελλειπτικό και το υπερβολικό πρόβλημα με την διαφορά ότι στο ελλειπτικό πρόβλημα η επίδραση του εμποδίου γίνεται αισθητή και πριν το εμπόδιο, $x<0$, δηλαδή υπάρχει ανάντη επίδραση λόγω του ελλειπτικού χαρακτήρα του προβλήματος, ενώ για το υπερβολικό πρόβλημα η επίδραση του εμποδίου στην ροϊκή συνάρτηση γίνεται αισθητή μόνο στα κατάντη του σημείου πρόσπτωσης, $x=0$
- Το γεγονός αυτό αντανακλά και στην αριθμητική επίλυση των αντίστοιχων προβλημάτων με το ελλειπτικό πρόβλημα να απαιτεί διακριτοποίηση σε εύλογο πολλαπλάσιο μήκος nL πριν και μετά το πτερύγιο σε συνδυασμό με ταυτόχρονη επίλυση της συνάρτησης δυναμικού για όλα τα σημεία του πλέγματος ενώ το υπερβολικό πρόβλημα απαιτεί διακριτοποίηση μόνο της περιοχής στα κατάντη του σημείου πρόσπτωσης $x=0$ και επίλυση με σάρωση των τιμών της συνάρτησης δυναμικού σε κάθε συγκεκριμένη θέση $x=x_i>0$ χωριστά, κατά την διεύθυνση y που είναι κάθετη στο πτερύγιο