Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Υπολογιστική Ρευστοδυναμική με Πεπερασμένα Στοιχεία

1η Εργασία

«Μεταφορά θερμότητας σε πτερύγιο σε μόνιμες & μεταβατικές συνθήκες»

Ανάθεση: 05/04/2021-Παράδοση: 23/04/2021

ΜΕΡΟΣ Α

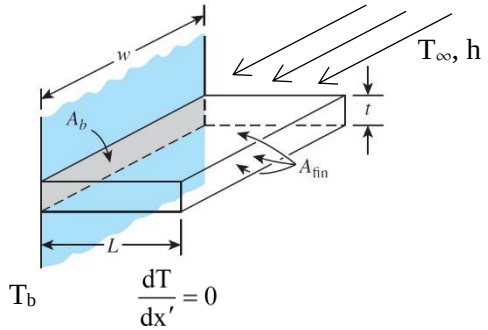
Η μεταφορά θερμότητας σε ένα πτερύγιο σταθερής ορθογωνικής διατομής σε μόνιμες συνθήκες περιγράφεται από την παρακάτω συνήθη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2T}{dx'^2} - m^2\left(T - T_\infty\right) = 0 \tag{1}$$

με ΣΣ:

$$\begin{aligned} &x' = 0: \ \ T = T_b \\ &x' = L: \ \frac{dT}{dx'} = 0 \end{aligned} \tag{2α,β}$$

όπου το $x' = 0$ αντιστοιχεί στην βάση του πτερυγίου και το $x' = L$ στο ελεύθερο άκρο του, Εικόνα 1. Επιπλέον, $m^2 = h\,p/\left(k\,A_c\right)$ και h είναι ο συντελεστής μεταφοράς με συναγωγή του αερίου ρεύματος, p, k, A_c είναι η περίμετρος, η θερμική αγωγιμότητα και το εμβαδό της διατομής του πτερυγίου, αντίστοιχα. Οι τονούμενες μεταβλητές εκφράζουν ποσότητες με διαστάσεις.



Εικόνα 1: Σχηματική αναπαράσταση πτερυγίου[3].

I. Να γραφεί το πρόβλημα σε αδιάσταση μορφή εισάγοντας το μήκος του πτερυγίου ως χαρακτηριστικό μήκος και την υπερ-θερμοκρασία $u = T - T_\infty$.

II. Να διαμορφωθεί το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων για το θεμελιώδες με γραμμικές συναρτήσεις βάσης και να περιγραφεί η σύνθεση του συνολικού προβλήματος με 3 στοιχεία, καθώς και η επιβολή συνοριακών συνθηκών. Να δώσετε αναλυτική περιγραφή των τοπικών μητρώων και του πίνακα συνεκτικότητας.

III. Να επαναληφθεί το προηγούμενο ερώτημα με τετραγωνικές συναρτήσεις βάσης και δύο στοιχεία.

IV. Να αναπτυχθεί κώδικας πεπερασμένων στοιχείων για την επίλυση του προβλήματος σε μόνιμες συνθήκες με τετραγωνικές συναρτήσεις βάσης.

a. Να γίνει έλεγχος πύκνωσης πλέγματος με 10, 20, 40 και 80 στοιχεία. Για το σκοπό αυτό να δώσετε συγκριτικό διάγραμμα της λύσης με αυτά τα 4 επίπεδα πλέγματος για h=25 W/(m^{2}K). Στο ίδιο διάγραμμα να γίνει σύγκριση με την αναλυτική λύση. Τι παρατηρείτε?

b. Ως μέρος των post-processing υπολογισμών, να δημιουργηθεί κατάλληλη υπορουτίνα στην οποία θα υπολογίζεται η συνολική θερμότητα που απάγεται από το πτερύγιο ως $\dot{Q}_{loss} = \int_{A_{fin}} h\left(T - T_\infty\right) dA'_{fin} = \int_0^1 h\, u\, p\, L dx$ με Gauss-Legendre ολοκλήρωση τριών σημείων με όποιο από τα παραπάνω πλέγματα κρίνετε ως καταλληλότερο. Μετά το κάλεσμα της παραπάνω υπορουτίνας να υπολογισθεί η αναλυτική τιμή του απαγόμενου θερμικού φορτίου $\dot{Q}_{loss}^{An}$, η μέγιστη θεωρητική απαγόμενη θερμότητα $\dot{Q}_{fin,max}$ και η αποτελεσματικότητα του πτερυγίου. Τα παραπάνω να αναπαρασταθούν σε γράφημα $\dot{Q}_{loss}$ συναρτήσει του αριθμού m, όπου θα συγκρίνεται αριθμητική και αναλυτική τιμή για h=25, 50, 100, 200 και 400 W/(m^{2}k). Επίσης, σε γράφημα αποτελεσματικότητας συναρτήσει του αριθμού m για τις προηγούμενες τιμές του συντελεστή μεταφοράς με συναγωγή. Να γίνει σχολιασμός των παραπάνω αποτελεσμάτων.

c. Να αναπαρασταθεί σε ίδιο διάγραμμα το θερμοκρασιακό προφίλ για h=25, 50, 100, 200 και 400 W/(m^{2}k) και να εξηγήσετε ποιο είναι το κατάλληλο μήκος του πτερυγίου ανάλογα τις συνθήκες. Μπορεί με αύξηση του συντελεστή συναγωγής να μειωθεί το μήκος του πτερυγίου και έτσι να εξασφαλιστεί η βέλτιστη χρήση των διαθέσιμων υλικών?

ΜΕΡΟΣ Β

Θεωρούμε το ίδιο πρόβλημα με παραπάνω, αλλά σε μεταβατικές συνθήκες:

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t'} = \frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} - m^2\left(T - T_\infty\right) \tag{3}$$

με ΑΣ και ΣΣ:

$$\begin{aligned} &0 \le x' \le L,\ t' = 0\ :\ T = T_b \\ &x' = 0, \qquad t' > 0\ :\ T = T_b \\ &x' = L, \qquad t' > 0\ :\ \frac{dT}{dx'} = 0 \end{aligned} \tag{4α,β,γ}$$

I. Να γραφεί το πρόβλημα σε αδιάστατη μορφή όπως παραπάνω.
II. Να διαμορφωθεί το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων με τετραγωνικές συναρτήσεις βάσης και να περιγραφεί η σύνθεση του συνολικού προβλήματος με 2 στοιχεία, καθώς και η επιβολή συνοριακών συνθηκών. Να δώσετε αναλυτική περιγραφή των τοπικών μητρώων και του πίνακα συνεκτικότητας. Η διακριτοποίηση της χρονικής παραγώγου να γίνει μέσω ενός σταθμισμένου μέσου όρου της τρέχουσας και προηγούμενης χρονικής στιγμής.
III. Να αναπτυχθεί κώδικας πεπερασμένων στοιχείων που θα επιλύει το αδιάστατο πρόβλημα χρησιμοποιώντας τετραγωνικές συναρτήσεις βάσης και αριθμητική ολοκλήρωση κατά Gauss τριών σημείων.
IV. Να γίνει χρονική και χωρική πύκνωση του μοντέλου για ρητό, Crank-Nicolson και πλήρως άρρητο σχήμα. Για το σκοπό αυτό να γίνουν διαγράμματα της θερμοκρασιακής κατανομής για h=100 W/(m^{2}K) τις χρονικές αδιάστατες στιγμές t=0.1 & t=0.5 με πλέγμα 20 και 80 στοιχείων και χρονικό βήμα dt=10^{-1},10^{-2},10^{-3}. Πως αποκρίνονται τα σχήματα χρονικής διακριτοποίησης?
V. Να αναπαρασταθεί γραφικά σε ίδιο γράφημα η θερμοκρασιακή κατανομή για τις χρονικές στιγμές t=0.1, t=0.2 και t=0.9 για όποιο πλέγμα και χρονικό βήμα κρίνετε κατάλληλο και πλήρως άρρητο σχήμα και h=25 W/(m^{2}K).
VI. Να αναπαρασταθεί γραφικά η χρονική εξέλιξη της θερμοκρασίας στο μέσον και στο δεξί άκρο του πτερυγίου για όποιο πλέγμα και χρονικό βήμα κρίνετε ως καταλληλότερο και πλήρως άρρητο σχήμα, h=25 W/(m^{2}K). Πως μπορούμε να εκτιμήσουμε την επίτευξη μόνιμων συνθηκών? Σε πόσα λεπτά επιτυγχάνονται οι μόνιμες συνθήκες και τότε πως συγκρίνεται το θερμοκρασιακό προφίλ με την αναλυτική λύση του μέρους Α?

Παράμετροι:

Γεωμετρία: $L = 5 \cdot 10^{-1}\ \mathrm{m}, t = 5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}, w = 10^{-1}\ \mathrm{m}$

Ιδιότητες πτερυγίου (αλουμίνιο): $k = 205\ \mathrm{W/(mK)}, \rho = 2700\ \mathrm{kg/m^3}, c_p = 900\ \mathrm{J/(kg\,°C)}$

Συνθήκες: $T_\infty = 20\,°\mathrm{C}, T_b = 100\,°\mathrm{C}$

Υλικό για μελέτη:

1) Σημειώσεις μαθήματος
2) Reddy J.N, 1993. An introduction to the finite element method. Chapters 3 & 6.
3) Cengel Y.A. and Ghajar A.J., 2015. Heat and mass transfer. Chapter 3.6.

Σχόλια:

- Η εργασία είναι αυστηρά ατομική. Η συνεργασία για συζήτηση ενθαρρύνεται, αλλά τυχόν φαινόμενα αντιγραφής θα οδηγήσουν σε μηδενισμό της εργασίας σας.
- Τα αποτελέσματα σας να δοθούν υπό μορφή τεχνικής αναφοράς ακολουθώντας την παραπάνω αρίθμηση. Η σύνταξη μπορεί να γίνει είτε με κειμενογράφο, είτε με καλής ποιότητας σαρωμένα χειρόγραφα. Ο προσανατολισμός των σελίδων να είναι σταθερός.
- Η κατάθεση θα γίνει μέσω eclass στο σχετικό φάκελο. Παρακαλείσθε να αναρτήσετε ένα συμπιεσμένο φάκελο στον οποίο θα περιέχονται (α) οι δύο κώδικες για κάθε μέρος της εργασίας, (β) δύο input αρχεία με κατάλληλο όνομα, που θα είναι το ίδιο με αυτό που διαβάζει ο αντίστοιχος κώδικας και (γ) ένα αρχείο μορφής .pdf της αναφοράς σας. Στα input αρχεία πρέπει να περιέχονται χαρακτηριστικές τιμές της αναφοράς σας. Οι κώδικες θα είναι σε αρχεία της μορφής .f90 και όχι ως παράρτημα σε pdf αρχείο. Οι κώδικες θα πρέπει να συνοδεύονται από κατάλληλο σχολιασμό στους επιμέρους υπολογισμούς. Δεν χρειάζεται να ανεβάσετε την υπορουτίνα ARROW, δεν χρειάζεται να ανεβάσετε όλο το projcet.
- Τα γραφήματα θα πρέπει να έχουν κατάλληλα διαμορφωμένους άξονες και επεξηγηματικές λεζάντες. Όταν δίνετε κάποιο γράφημα ή ομάδα γραφημάτων, προσπαθήστε να αναπτύξετε την σκέψη σας γύρω από το αριθμητικό σχήμα ή/και τη φυσική του προβλήματος με κάποιο σχολιασμό και όχι μόνο αποτελέσματα.

Καλή επιτυχία!