Κεφ. 3: Παρεμβολή

3.1 Εισαγωγή

3.2 Πολυωνυμική παρεμβολή

3.2.1 Παρεμβολή Lagrange

3.2.2 Παρεμβολή Newton

3.3 Παρεμβολή με κυβικές splines

3.4 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

3.5 Παρεμβολή με ορθογώνια πολυώνυμα

3.1 Εισαγωγή στη πολυωνυμική παρεμβολή

Έστω ότι από μετρήσεις ή/και υπολογισμούς δίδονται οι τιμές $x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_n$ και οι αντίστοιχες διακριτές τιμές $f(x_i)$ με $i = 0,1,\ldots,n$.

Σημειώνεται ότι ενώ τα $n+1$ ζευγάρια τιμών $x_i \to f(x_i) = f_i$ είναι γνωστά η αναλυτική μορφή της συνάρτησης $f(x)$ **είναι άγνωστη**.

Ο σκοπός της αριθμητικής πολυωνυμικής παρεμβολής είναι η **εύρεση συνάρτησης** $g(x)$ έτσι ώστε $g(x_i) \equiv f(x_i) = f_i$ και που θα προσεγγίζει την άγνωστη $f(x)$.

Για $n+1$ ζευγάρια τιμών η συνάρτηση $g(x)$ επιλέγεται να είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n της μορφής $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ και επομένως θα πρέπει $P_n(x_i) \equiv f(x_i) = f_i$ με $i = 0,1,\ldots,n$.

Επομένως θα πρέπει να ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$
\begin{aligned}
P_n(x_0) &= a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 = f_0 \\
P_n(x_1) &= a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \ldots + a_1 x_1 + a_0 = f_1 \\
\ldots & \\
P_n(x_i) &= a_n x_i^n + a_{n-1} x_i^{n-1} + \ldots + a_1 x_i + a_0 = f_i \\
\ldots & \\
P_n(x_n) &= a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \ldots + a_1 x_n + a_0 = f_n
\end{aligned}
\quad \text{ή} \quad
\begin{bmatrix}
1 & x_0 & \ldots & x_0^{n-1} & x_0^n \\
1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^n \\
\ldots & & & & \\
1 & x_i & \ldots & x_i^{n-1} & x_i^n \\
\ldots & & & & \\
1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} & x_n^n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_i \\ \ldots \\ a_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \ldots \\ f_i \\ \ldots \\ f_n \end{bmatrix}
$$

Επομένως, οι συντελεστές του πολυώνυμου $P_n(x)$ προκύπτουν από τη λύση του παραπάνω συστήματος που είναι στη μορφή $\boldsymbol{Xa} = \boldsymbol{f}$.

Αποδεικνύεται ότι:

$$
det\,\boldsymbol{X} = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)\ldots(x_{n-1} - x_n) = \prod_{i<j}(x_i - x_j) \neq 0
$$

Επομένως, **ο πίνακας $\boldsymbol{X}$ είναι αντιστρέψιμος και η λύση του συστήματος είναι μοναδική όπως και το πολυώνυμο παρεμβολής** $P_n(x)$!!

Έχοντας την αναλυτική μορφή του πολυωνύμου $P_n(x)$ υπολογίζεται προσεγγιστικά η τιμή της συνάρτησης $f(x)$ $\forall x \in [x_0, x_n]$.

Είναι γνωστό ότι για μεγάλο αριθμό δεδομένων, κάτι που είναι συνηθισμένο, η επίλυση του συστήματος $\boldsymbol{Xa} = \boldsymbol{f}$ είναι αριθμητικά επίπονη λόγω του δείκτη κατάστασης του πίνακα $\boldsymbol{X}$.

Αναζητούμε τεχνικές που να εξάγουν το πολυώνυμο παρεμβολής $P_n(x)$ έτσι ώστε $P_n(x_i) = f_i$ **χωρίς να είναι αναγκαία η επίλυση γραμμικού συστήματος** (π.χ. παρεμβολές Newton και Lagrange).

3.2 Πολυωνυμική παρεμβολή

3.2.1 Παρεμβολή Newton

Το ζητούμενο πολυώνυμο παρεμβολής $P_n(x)$ γράφεται στη μορφή

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Οι άγνωστοι συντελεστές b_i, $i = 0,1,\ldots,n$, προκύπτουν ως εξής:

$$x = x_0:\ P_n(x_0) = b_0 = f_0$$

$$x = x_1:\ P_n(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0) = f_1$$

$$x = x_2:\ P_n(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f_2$$

$$\vdots$$

$$x = x_i:\ P_n(x_i) = b_0 + b_1(x_i - x_0) + b_2(x_i - x_0)(x_i - x_1) + \ldots + b_i(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1}) = f_i$$

$$\vdots$$

$$x = x_n:\ P_n(x_n) = b_0 + b_1(x_n - x_0) + b_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \ldots + b_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1}) = f_n$$

Σχετικά εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$b_0 = f_0$$

$$b_1 = \frac{f_1}{x_1 - x_0} + \frac{f_0}{x_0 - x_1}$$

$$b_2 = \frac{f_2}{\left(x_2 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)} + \frac{f_1}{\left(x_1 - x_2\right)\left(x_1 - x_0\right)} + \frac{f_0}{\left(x_0 - x_1\right)\left(x_0 - x_2\right)}$$

$$\vdots$$

$$b_n = \frac{f_n}{\left(x_n - x_0\right)\ldots\left(x_n - x_{n-1}\right)} + \frac{f_{n-1}}{\left(x_{n-1} - x_0\right)\ldots\left(x_{n-1} - x_{n-2}\right)\left(x_{n-1} - x_n\right)} + \ldots + \frac{f_0}{\left(x_0 - x_1\right)\ldots\left(x_0 - x_n\right)}$$

<u>Παράδειγμα</u>: Δίδονται τα δεδομένα $f_0 = f(0) = 1$, $f_1 = f(1) = 2$, $f_2 = f(2) = 4$ και να βρεθεί με τη μέθοδο Newton το πολυώνυμο παρεμβολής 2ης τάξης $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$.

$$b_0 = f_0 = 1$$

$$b_1 = \frac{f_1}{x_1 - x_0} + \frac{f_0}{x_0 - x_1} = \frac{2}{1-0} + \frac{1}{0-1} = 1$$

$$b_2 = \frac{4}{(2-0)(2-1)} + \frac{2}{(1-2)(1-0)} + \frac{1}{(0-1)(0-2)} = 2 + (-2) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Επομένως:

$$P_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) = 1 + 1(x-0) + \frac{1}{2}(x-0)(x-1) \Rightarrow$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

3.2.2 Παρεμβολή Lagrange

Το ζητούμενο πολυώνυμο παρεμβολής $P_n(x)$ γράφεται στη μορφή

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} L_i(x) f_i \ , \quad \text{όπου}$$

$$L_i(x)=\frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}=\prod_{\substack{j\neq i\\ j=0}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Όταν $i=j$ η ποσότητα $L_i(x_j)=L_i(x_i)=\dfrac{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}=1.$

Όταν $i\neq j$ τότε το x_j θα είναι ίσο με ένα από τα $x_0,<\dots<x_{i-1}<x_{i+1}<\dots<x_n$ και επομένως $L_i(x_j)=0$.

Επομένως $L_i\left(x_j\right)=1$ για $i=j$ και $L_i\left(x_j\right)=0$ για $i\neq j$.

$$P_n\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}L_i\left(x\right)f_i=L_0\left(x\right)f_0+L_1\left(x\right)f_1+\ldots+L_i\left(x\right)f_i+\ldots+L_n\left(x\right)f_n$$

Με βάση τα παραπάνω ισχύει ότι:

$$P_n\left(x_0\right)=L_0\left(x_0\right)f_0+L_1\left(x_0\right)f_1+\ldots+L_i\left(x_0\right)f_i+\ldots+L_n\left(x_0\right)f_n=f_0$$
$$P_n\left(x_1\right)=L_0\left(x_1\right)f_0+L_1\left(x_1\right)f_1+\ldots+L_i\left(x_1\right)f_i+\ldots+L_n\left(x_1\right)f_n=f_1$$
$$\ldots$$
$$P_n\left(x_i\right)=L_0\left(x_i\right)f_0+L_1\left(x_i\right)f_1+\ldots+L_i\left(x_i\right)f_i+\ldots+L_n\left(x_i\right)f_n=f_i$$
$$\ldots$$
$$P_n\left(x_n\right)=L_0\left(x_n\right)f_0+L_1\left(x_n\right)f_1+\ldots+L_i\left(x_n\right)f_i+\ldots+L_n\left(x_n\right)f_n=f_n$$

Επομένως το προκύπτον πολυώνυμο $P_n\left(x\right)$ ικανοποιεί τις σχέσεις που $P_n\left(x_i\right)=f_i$.

Παράδειγμα: Δίδονται τα δεδομένα $f_0 = f(0) = 1$, $f_1 = f(1) = 2$, $f_2 = f(2) = 4$ και να βρεθεί με τη μέθοδο Lagrange το πολυώνυμο παρεμβολής 2ης τάξης $P_2(x) = L_0(x) f_0 + L_1(x) f_1 + L_2(x) f_2$.

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = -x(x-2)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{1}{2}x(x-1)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2) f_0 - x(x-2) f_1 + \frac{1}{2}x(x-1) f_2 \Rightarrow P_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

<u>Παράδειγμα</u>: Επιλέξτε αυθαίρετα μία συνάρτηση $f(x)$ και τέσσερα $\{x_i, f(x_i)\}$.
Στη συνέχεια, με βάση τα επιλεγμένα ζευγάρια τιμών, βρείτε το πολυώνυμο παρεμβολής, $3^{ης}$ τάξης, εφαρμόζοντας παρεμβολή α) **Lagrange** και β) **Newton**.

Έστω $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ και τα αντίστοιχα ζεύγη τιμών $\{0,-5\},\{2,7\},\{5,190\},\{9,1246\}$.

α) Παρεμβολή **Lagrange**

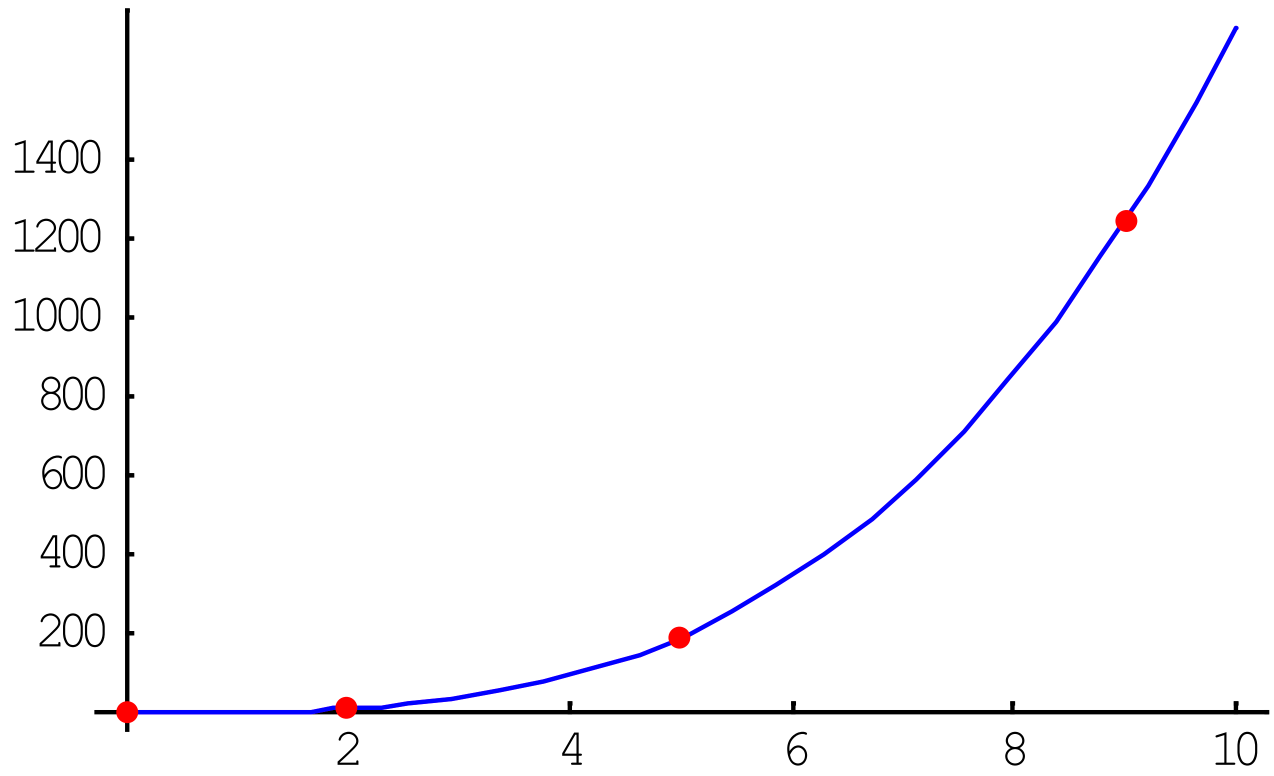
$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \quad , \quad L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \quad , \quad L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$P_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 \equiv f(x)$$

β) Παρεμβολή **Newton**: Θα δώσει ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα.



Γραφική παράσταση της $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ με τα σημεία παρεμβολής $\{0,-5\},\{2,7\},\{5,190\},\{9,1246\}$ και του πολυωνύμου $P_3(x)$ που προέκυψε με τις παρεμβολές Lagrange και Newton. Σημειώνεται ότι στη περίπτωση αυτή λόγω της μοναδικότητας του πολυωνύμου παρεμβολής $f(x) \equiv P_3(x)$.

3.3 Μέθοδος κυβικών splines

Αρχικά η μέθοδος περιγράφεται για την ειδική περίπτωση των 4 ($n=3$) σημείων και στη συνέχεια γενικεύεται για $n+1$ σημεία.

Έστω τα δεδομένα: $(x_0, f_0),(x_1, f_1),(x_2, f_2),(x_3, f_3)$

Σε κάθε διάστημα $\left[x_j, x_{j+1}\right]$, $j=0,1,2$ βρίσκουμε ένα πολυώνυμο παρεμβολής 3ης τάξης:

$S_j(x)=a_j x^3+b_j x^2+c_j x+d_j$, $j=0,1,2$ (συνολικά **12 άγνωστοι**) έτσι ώστε να ισχύουν τα εξής:

Συνθήκη Α: $S_0(x_0)=f_0$, $S_0(x_1)=f_1=S_1(x_1)$, $S_1(x_2)=f_2=S_2(x_2)$, $S_2(x_3)=f_3$

Συνθήκη Β: $S_0'(x_1)=S_1'(x_1)$, $S_1'(x_2)=S_2'(x_2)$

Συνθήκη Γ: $S_0''(x_1)=S_1''(x_1)$, $S_1''(x_2)=S_2''(x_2)$

Θέτουμε αυθαίρετα (για να κλείσουμε το σύστημα): $S_0''(x_0)=0$, $S_2''(x_3)=0$

Ορίζουμε τις ποσότητες $y_0'' = S_0''(x_0)$, $y_1'' = S_0''(x_1) = S_1''(x_1)$, $y_2'' = S_1''(x_2) = S_2''(x_2)$, $y_3'' = S_2''(x_3)$

και $h_0 = x_1 - x_0$, $h_1 = x_2 - x_1$, $h_2 = x_3 - x_2$, $\Delta f_0 = f_1 - f_0$, $\Delta f_1 = f_2 - f_1$, $\Delta f_2 = f_3 - f_2$

Αφού τα πολυώνυμα $S_j(x)$ είναι $3^{ης}$ τάξης οι δεύτερες παράγωγοί τους $S_j''(x)$ θα είναι πολυώνυμα $1^{ης}$ τάξης και επιλέγουμε να τα γράψουμε στη μορφή:

$$S_0''(x) = y_0''\frac{x_1 - x}{h_0} + y_1''\frac{x - x_0}{h_0}, \quad S_1''(x) = y_1''\frac{x_2 - x}{h_1} + y_2''\frac{x - x_1}{h_1}, \quad S_2''(x) = y_2''\frac{x_3 - x}{h_2} + y_3''\frac{x - x_2}{h_2}$$

Με τη συγκεκριμένη επιλογή ικανοποιείται αυτόματα η συνθήκη Γ.

Ολοκληρώνουμε δύο φορές: $S_j(x) = \frac{y_j''}{6h_j}(x_{j+1} - x)^3 + \frac{y_{j+1}''}{6h_j}(x - x_j)^3 + c_j x + d_j$, $\quad j = 0,1,2$.

Βρίσκουμε τους άγνωστους συντελεστές c_j και d_j ικανοποιώντας τη συνθήκη Α.

$$S_0(x)=\frac{y_0''}{6h_0}(x_1-x)^3+\frac{y_1''}{6h_0}(x-x_0)^3+c_0x+d_0, \qquad S_0(x_0)=f_0 \qquad S_0(x_1)=f_1$$

$$S_1(x)=\frac{y_1''}{6h_1}(x_2-x)^3+\frac{y_2''}{6h_1}(x-x_1)^3+c_1x+d_1, \qquad S_1(x_1)=f_1 \qquad S_1(x_2)=f_2$$

$$S_2(x)=\frac{y_2''}{6h_2}(x_3-x)^3+\frac{y_2''}{6h_2}(x-x_2)^3+c_2x+d_2, \qquad S_2(x_2)=f_2 \qquad S_2(x_3)=f_3$$

Αντικαθιστούμε τους συντελεστές c_j και d_j και προκύπτει:

$$S_0(x)=\frac{y_0''}{6h_0}(x_1-x)^3+\frac{y_1''}{6h_0}(x-x_0)^3+\left(\frac{f_1}{h_0}-\frac{y_1''h_0}{6}\right)(x-x_0)+\left(\frac{f_0}{h_0}-\frac{y_0''h_0}{6}\right)(x_1-x)$$

$$S_1(x)=\frac{y_1''}{6h_1}(x_2-x)^3+\frac{y_2''}{6h_1}(x-x_1)^3+\left[\frac{f_2}{h_1}-\frac{y_2''h_1}{6}\right](x-x_1)+\left[\frac{f_1}{h_1}-\frac{y_1''h_1}{6}\right](x_2-x)$$

$$S_2(x)=\frac{y_2''}{6h_2}(x_3-x)^3+\frac{y_3''}{6h_2}(x-x_2)^3+\left[\frac{f_3}{h_2}-\frac{y_3''h_2}{6}\right](x-x_2)+\left[\frac{f_2}{h_2}-\frac{y_2''h_2}{6}\right](x_3-x)$$

Η συνθήκη Β δεν έχει ακόμη εφαρμοστεί. Επομένως παραγωγίζουμε τα $S_0(x), S_1(x), S_2(x)$:

$$S_0'(x) = -\frac{y_0''}{2h_0}(x_1 - x)^2 + \frac{y_1''}{2h_0}(x - x_0)^2 + \frac{\Delta f_0}{h_0} - \frac{h_0}{6}(y_1'' - y_0'')$$

$$S_1'(x) = -\frac{y_1''}{2h_1}(x_2 - x)^2 + \frac{y_2''}{2h_1}(x - x_1)^2 + \frac{\Delta f_1}{h_1} - \frac{h_1}{6}(y_2'' - y_1'')$$

$$S_2'(x) = -\frac{y_2''}{2h_2}(x_3 - x)^2 + \frac{y_3''}{2h_2}(x - x_2)^2 + \frac{\Delta f_2}{h_2} - \frac{h_2}{6}(y_3'' - y_2'')$$

Εφαρμόζεται η συνθήκη Β, δηλαδή $S_0'(x_1) = S_1'(x_1)$, $S_1'(x_2) = S_2'(x_2)$:

$$2(h_0 + h_1)y_1'' + h_1 y_2'' = 6\left(\frac{\Delta f_1}{h_1} - \frac{\Delta f_0}{h_0}\right)$$

$$h_1 y_1'' + 2(h_1 + h_2)y_2'' = 6\left(\frac{\Delta f_2}{h_2} - \frac{\Delta f_1}{h_1}\right)$$

Προκύπτουν τα y_1'' και y_2'' τα οποία αντικαθιστούμε στις εκφράσεις για τα $S_0(x), S_1(x), S_2(x)$.

<u>Παράδειγμα</u>: Να εφαρμοστεί η μέθοδος των κυβικών splines, στον παρακάτω πίνακα δεδομένων ώστε να εκτιμηθούν οι τιμές των $f(0.25)$ και $f'(0.25)$:

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x_i)$	-0.6205	-0.2840	0.0066	0.2484

Οι όροι h_j είναι: $h_0 = x_1 - x_0 = 0.1,\qquad h_1 = x_2 - x_1 = 0.1,\qquad h_2 = x_3 - x_2 = 0.1$

Οι όροι Δf_j είναι: $\Delta f_0 = f_1 - f_0 = 0.3365,\quad \Delta f_1 = f_2 - f_1 = 0.2906,\qquad \Delta f_2 = f_3 - f_2 = 0.2418$

Τριδιαγώνιο σύστημα ($y_0'' = y_3'' = 0$): $\begin{bmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} \dfrac{\Delta f_1}{h_1} - \dfrac{\Delta f_0}{h_0} \\ \dfrac{\Delta f_2}{h_2} - \dfrac{\Delta f_1}{h_1} \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} -0.459 \\ -0.488 \end{bmatrix} \Rightarrow y_1'' = -5.392 \text{ και } y_2'' = -5.972.$$

Τα πολυώνυμα τα οποία αντιστοιχούν στα τρία υποδιαστήματα είναι:

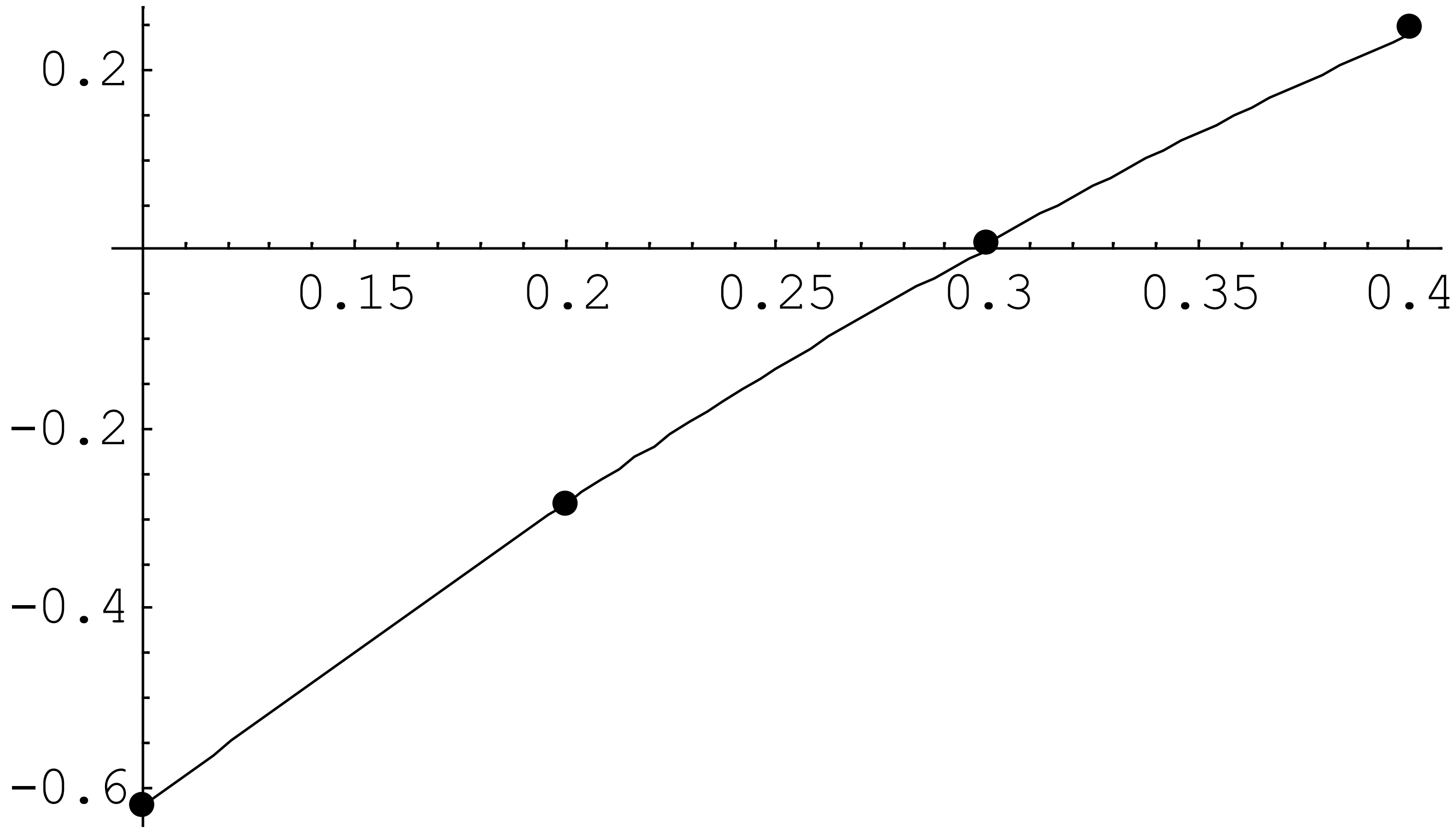
$$S_0\left(x\right) = -0.957 + 3.18527x + 2.696x^2 - 8.98667x^3$$

$$S_1\left(x\right) = -1.02116 + 4.14767x - 2.116x^2 - 0.9666x^3$$

$$S_2\left(x\right) = -1.316 + 7.09607x - 11.944x^2 + 9.9533x^3$$

Για τον υπολογισμό της τιμής στο $x = 0.25$ επιλεγούμε το πολυώνυμο $S_1\left(x\right)$, το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα [0.2, 0.3].

Τότε $S_1\left(0.25\right) = -0.1316$ και $S_1'\left(0.25\right) = 2.9084$.



Γραφική απεικόνιση των πολυωνύμων παρεμβολής με κυβικές Splines.

Γενίκευση:

Έστω ότι έχουμε τα δεδομένα $\left(x_j, f_j\right)$ με $j=0,1,2,\ldots,n$. Για κάθε διάστημα $\left[x_j, x_{j+1}\right]$ βρίσκουμε ένα πολυώνυμο παρεμβολής 3ης τάξης $S_j(x)$, $j=0,\ldots,n-1$ έτσι ώστε να ισχύουν τα παρακάτω:

Συνθήκη Α: $S_0\left(x_0\right)=f_0, \quad S_{j-1}\left(x_j\right)=f_j=S_j\left(x_j\right), \quad j=1,\ldots,n-1, \quad S_{n-1}\left(x_n\right)=f_n$

Συνθήκη Β: $S'_{j-1}\left(x_j\right)=S'_j\left(x_j\right), \quad j=1,\ldots,n-1$

Συνθήκη Γ: $S''_{j-1}\left(x_j\right)=S''_j\left(x_j\right), \quad j=1,\ldots,n-1$

Ορίζουμε τις ποσότητες $y''_j=S''_j\left(x_j\right), \quad j=1,\ldots,n-1;\ h_j=x_{j+1}-x_j,\ \Delta f_j=f_{j+1}-f_j\ ,\ j=0,\ldots,n-1$

Αφού τα πολυώνυμα $S_j(x)$ είναι 3ης τάξης οι δεύτερες παράγωγοί τους $S''_j(x)$ θα είναι πολυώνυμα 1ης τάξης και επιλέγουμε να τα γράψουμε στη μορφή

$$S_j''(x) = y_j'' \frac{x_{j+1} - x}{h_j} + y_{j+1}'' \frac{x - x_j}{h_j}, \quad j = 0, \ldots, n-1$$

Με τη συγκεκριμένη επιλογή ικανοποιείται αυτόματα η συνθήκη Γ.

Ολοκληρώνουμε δύο φορές και βρίσκουμε $S_j\left(x_j\right) = f_j$

$$S_j\left(x\right) = \frac{y_j''}{6h_j}\left(x_{j+1} - x\right)^3 + \frac{y_{j+1}''}{6h_j}\left(x - x_j\right)^3 + c_j x + d_j$$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη Α δηλαδή $S_j\left(x_j\right) = f_j$ και $S_j\left(x_{j+1}\right) = f_{j+1}$ βρίσκουμε

$$c_j = \frac{\Delta f_j}{h_j} - \frac{h_j}{6}\left(y_{j+1}'' - y_j''\right) \quad \text{και} \quad d_j = \frac{x_{j+1} f_j - x_j f_{j+1}}{h_j} - \frac{h_j}{6}\left(x_{j+1} y_j'' - x_j y_{j+1}''\right)$$

Αντικαθιστούμε τους συντελεστές c_j και d_j:

$$S_j(x) = \frac{y''_j}{6h_j}\left(x_{j+1} - x\right)^3 + \frac{y''_{j+1}}{6h_j}\left(x - x_j\right)^3 + \left(\frac{f_{j+1}}{h_j} - \frac{y''_{j+1}h_j}{6}\right)\left(x - x_j\right) + \left(\frac{f_j}{h_j} - \frac{y''_j h_j}{6}\right)\left(x_{j+1} - x\right)$$

Επομένως η μορφή των $S_j(x)$ που έχουν προκύψει έως τώρα ικανοποιεί τις συνθήκες Α και Γ.

Βρίσκουμε τις ποσότητες y''_j που παραμένουν ακόμα άγνωστες έτσι ώστε να ικανοποιείται και η συνθήκη Β. Παραγωγίζουμε μία φορά και έχουμε

$$S'_j(x) = -\frac{y''_j}{2h_j}\left(x_{j+1} - x\right)^2 + \frac{y''_{j+1}}{2h_j}\left(x - x_j\right)^2 + \frac{\Delta f_j}{h_j} - \frac{h_j}{6}\left(y''_{j+1} - y''_j\right)$$

Για να εφαρμόσουμε τη συνθήκη Β γράφουμε και την αντίστοιχη έκφραση

$$S'_{j-1}(x) = -\frac{y''_{j-1}}{2h_{j-1}}\left(x_j - x\right)^2 + \frac{y''_j}{2h_{j-1}}\left(x - x_{j-1}\right)^2 + \frac{\Delta f_{j-1}}{h_{j-1}} - \frac{h_{j-1}}{6}\left(y''_j - y''_{j-1}\right)$$

Εξισώνουμε τις δύο εκφράσεις και μετά από κάποια επεξεργασία έχουμε το σύστημα

$$-y_j''h_j+\frac{2\Delta f_j}{h_j}-\frac{h_j}{3}\left(y_{j+1}''-y_j''\right)=y_j''h_{j-1}+\frac{2\Delta f_{j-1}}{h_{j-1}}-\frac{h_{j-1}}{3}\left(y_j''-y_{j-1}''\right)$$

που το ξαναγράφουμε στη μορφή τριδιαγωνίου συστήματος

$$h_{j-1}y_{j-1}''+2\left(h_{j-1}+h_j\right)y_j''+h_jy_{j+1}''=6\left[\frac{\Delta f_j}{h_j}-\frac{\Delta f_{j-1}}{h_{j-1}}\right],\quad j=1,\ldots,n-1$$

Για να κλείσει το σύστημα θέτουμε $S_0''\left(x_0\right)=S_{n-1}''\left(x_n\right)=0$.

Από την επίλυση του συστήματος προκύπτουν τα y_j'', $j=1,\ldots,n-1$ τα οποία αντικαθίστανται στις εκφράσεις $S_j\left(x\right)$, $j=0,\ldots,n-1$ και προκύπτουν τα ζητούμενα πολυώνυμα παρεμβολής 3^ου^ βαθμού.

3.4 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Έστω ότι έχουμε τα δεδομένα (x_i, f_i) με $i = 1,2,...,n$. Ορίζουμε τις διαφορές $d_i = f_i - P_m(x_i)$ όπου $P_m(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m$ το ζητούμενο πολυώνυμο παρεμβολής που προκύπτει ελαχιστοποιώντας την ποσότητα $S = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(f_i - P_m(x_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(f_i - a_0 - a_1 x_i - ... - a_m x_i^m\right)^2$

Αυτό επιτυγχάνεται θέτοντας τις παραγώγους του S ως προς τους συντελεστές a_m ίσες με το μηδέν και επιλύοντας το προκύπτον γραμμικό σύστημα.

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \Rightarrow 2\sum_{i=1}^{n} \left(f_i - a_0 - a_1 x_i - ... - a_m x_i^m\right)(-1) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(a_0 + a_1 x_i + ... + a_m x_i^m\right) = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow 2\sum_{i=1}^{n} \left(f_i - a_0 - a_1 x_i - ... - a_m x_i^m\right)(-x_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(a_0 + a_1 x_i + ... + a_m x_i^m\right) x_i = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i$$

$$\dots$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_m} = 0 \Rightarrow 2\sum_{i=1}^{n} \left(f_i - a_0 - a_1 x_i - ... - a_m x_i^m\right)\left(-x_i^m\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(a_0 + a_1 x_i + ... + a_m x_i^m\right) x_i^m = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^m$$

Το σύστημα των $m+1$ εξισώσεων ξαναγράφεται στη μορφή

$$na_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i a_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} a_2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,3} a_3 + \ldots + \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,m} a_m = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i a_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} a_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,3} a_2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,m+1} a_m = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} a_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,3} a_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,4} a_2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,m+2} a_m = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} f_i$$

……

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,m} a_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,m+1} a_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,m+2} a_2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2m} a_m = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,m} f_i$$

Η μέθοδος συνήθως εφαρμόζεται για $m << n$.

Επίσης εναλλακτικά το σύστημα γράφεται στη μορφή $\boldsymbol{A}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ ή

$$
\begin{bmatrix}
n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m} \\
\sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{3} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\sum_{i=1}^{n} x_i^{m} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\sum_{i=1}^{n} f_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^{m} f_i
\end{bmatrix}
$$

Αποδεικνύεται ότι η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών $\boldsymbol{A}$ είναι διάφορη του μηδενός και επομένως η λύση του συστήματος είναι μοναδική.

Απόδειξη μοναδικής λύσης για σύστημα 2 εξισώσεων:

$$\det\left(\boldsymbol{A}\right) = n\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i = n\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - n\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i = n\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - 2n\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i =$$

$$= n\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - 2n\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n^2\overline{x}^2 = n\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - 2n\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\sum_{i=1}^{n} \overline{x}^2 = n\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{\,2} - 2\overline{x}x_i + \overline{x}^2\right) =$$

$$= n\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 \neq 0$$

Για περισσότερες από 2 εξισώσεις απαιτείται η μελέτη του γενικού προβλήματος ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης του λεγόμενου Γραμμικού Προβλήματος Ελαχίστων Τετραγώνων [Ακριβής και Δουγαλής, Κεφ.5, Παράγραφος 5.3].

Επίσης, με βάση την θεωρία εύρεσης ελαχίστου – μεγίστου συναρτήσεων πολλών μεταβλητών αποδεικνύεται ότι θέτοντας της πρώτες παραγώγους $\partial S / \partial a_i = 0$ ελαχιστοποιείται η συνάρτηση S.

Απαιτείται ο υπολογισμός του εσσιανού πίνακα με στοιχεία τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{\partial S}{\partial a_j}\right)$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Εύκολα προκύπτει ότι $\frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{\partial S}{\partial a_j}\right) = 2A_{ij}$ όπου A_{ij} τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα $\boldsymbol{A}$.

Επομένως, ο εσσιανός πίνακας είναι πραγματικός και συμμετρικός.

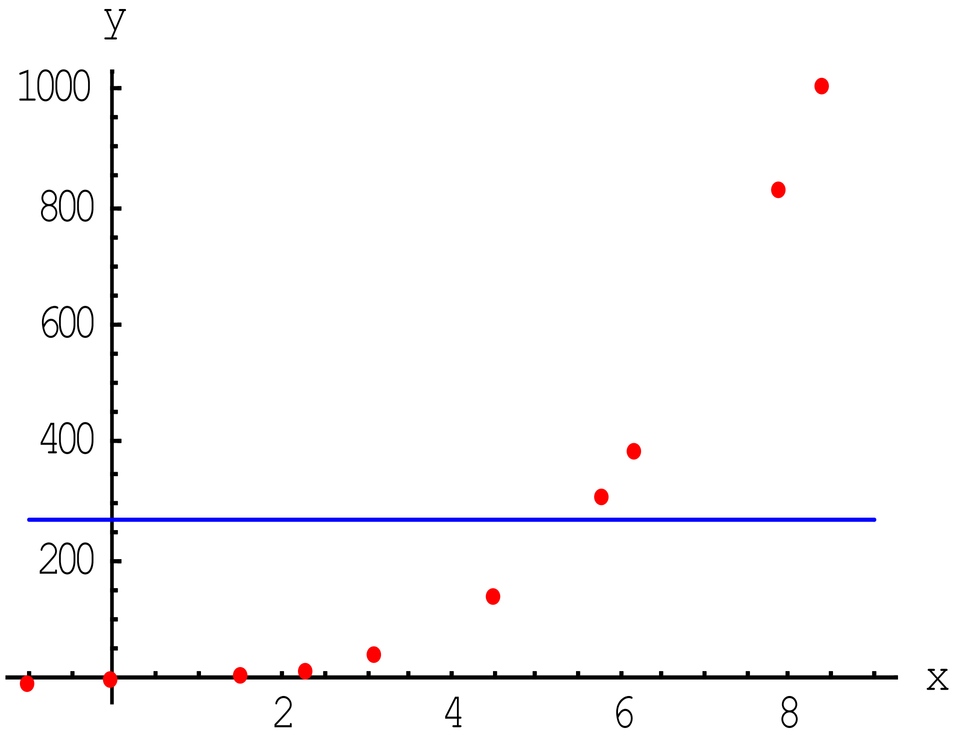
Στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι όλες οι ιδιοτιμές του εσσιανού πίνακα είναι θετικές και επομένως, ο εσσιανός πίνακας είναι θετικά ορισμένος. Άρα, σύμφωνα με σχετικό θεώρημα αφού ο εσσιανός πίνακας είναι θετικά ορισμένος, πράγματι θέτοντας $\partial S / \partial a_i = 0$ ελαχιστοποιείται η συνάρτηση S.

Παράδειγμα: Με βάση τη συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ επιλέξτε δέκα ζευγάρια σημείων $\left(x_i, f(x_i)\right)$ και εφαρμόστε παρεμβολή με τη **μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων** μηδενικής, πρώτης και δεύτερης τάξης.

Επιλέγονται τα εξής 10 ζεύγη τιμών:

{-1, -14}, {0, -5}, {1.5, 1}, {2.3, 12.66}, {3.1, 38.15}, {4.5, 134.5}, {5.8, 307.5},

{6.2, 381.14}, {7.9, 825.45}, {8.4, 1002.33} α) Πολυώνυμο μηδενικού βαθμού: $P_0(x) = a_0$, $10a_0 = \sum_{i=1}^{10} f_i$, $P_0(x) = 268.37$ ($S = 1.226 \times 10^6$)

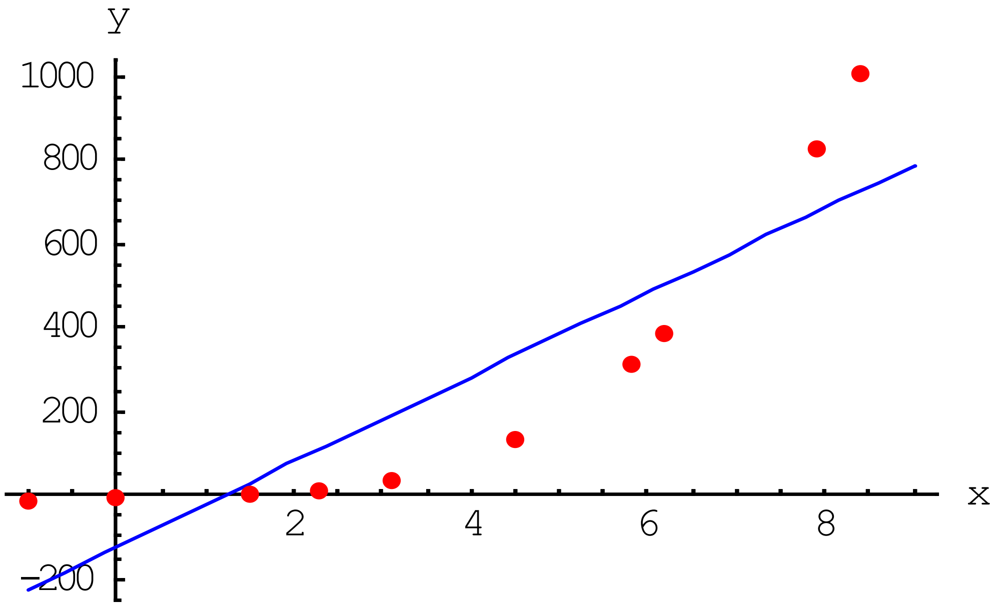


Γραφική παράσταση του πολυωνύμου 0^ου βαθμού (μπλε γραμμή) με ελάχιστα τετράγωνα.

β) Πολυώνυμο πρώτου βαθμού: $P_1(x) = a_0 + a_1 x$

$$10a_0 + a_1 \sum_{i=1}^{10} x_i = \sum_{i=1}^{10} f_i$$
$$a_0 \sum_{i=1}^{10} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = \sum_{i=1}^{10} x_i f_i$$

$$\Rightarrow \quad P_1(x) = 101.08x - 122.81 \qquad (S = 2.684 \times 10^5)$$



Γραφική παράσταση του πολυωνύμου 1ου βαθμού (μπλε γραμμή) με ελάχιστα τετράγωνα.

γ) Πολυώνυμο δεύτερου βαθμού: $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$10a_0 + a_1 \sum_{i=1}^{10} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = \sum_{i=1}^{10} f_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{10} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{10} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{10} x_i^3 = \sum_{i=1}^{10} x_i f_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{10} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{10} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{10} x_i^4 = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 f_i$$

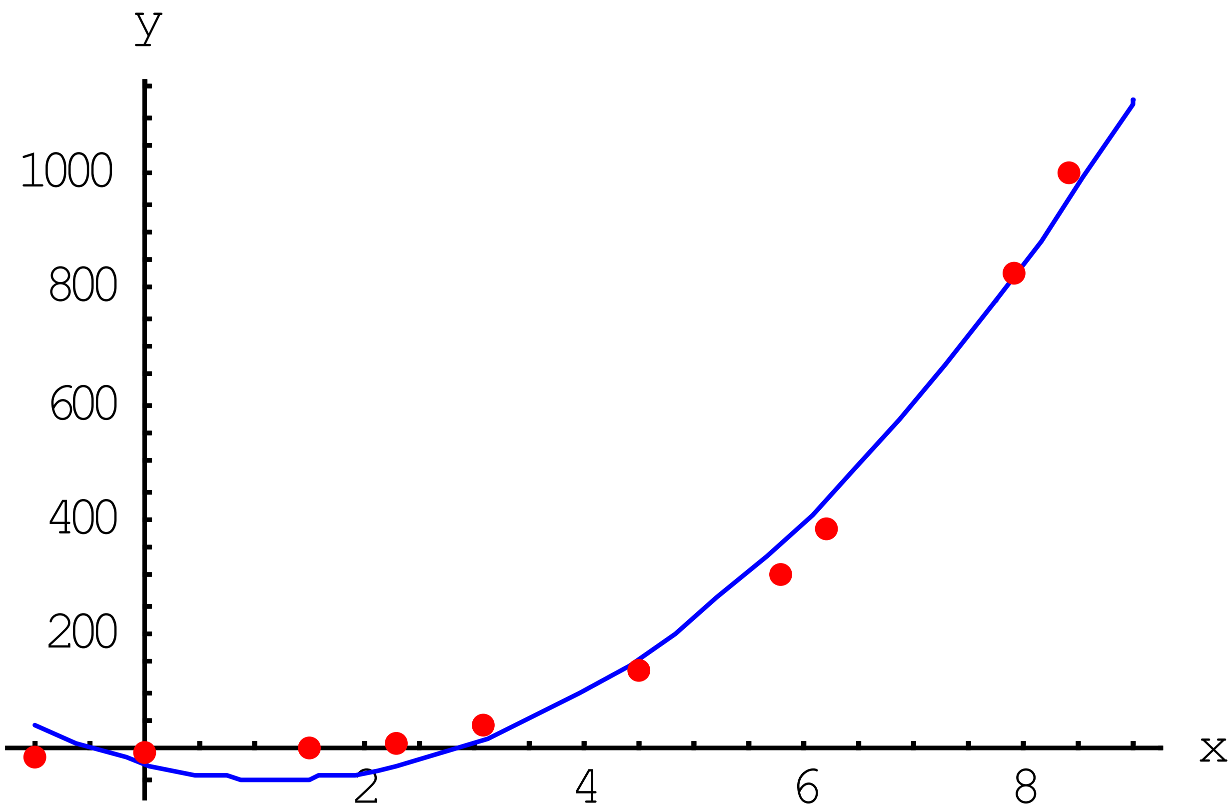
$$10a_0 + 38.7a_1 + 243.45a_2 = 2683.73$$

$$38.7a_0 + 243.45a_1 + 1654.64a_2 = 19855.3$$

$$243.45a_0 + 1654.64a_1 + 12019.5a_2 = 150381.8$$

$a_0 =$ -24.436 $\quad$ $a_1 =$ -45.957 $\quad$ $a_2 =$ 19.333

$P_2(x) = 19.333x^2 - 45.957x - 24.436$ ($S = 1.652 \times 10^4$)



Γραφική παράσταση του πολυωνύμου $2^{ου}$ βαθμού (μπλε γραμμή) με ελάχιστα τετράγωνα.

Παράδειγμα: Να εφαρμοσθεί η μέθοδος των ελάχιστων τετραγώνων στον πίνακα δεδομένων:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x_i)$	1.3	3.5	4.2	5	7	8.8	10.1	12.5	13	15.6

Επιλέγοντας πολυώνυμο 2ου βαθμού προκύπτει το σύστημα

$$na_0 + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i + a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

$$a_0\sum_{i=1}^{n} x_i + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

$$a_0\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f_i$$

Επιλύεται το σύστημα και προκύπτουν οι συντελεστές a_0, a_1, a_2.

Το πολυώνυμο παρεμβολής είναι $P_2(x) = 0.407 + 1.155x + 0.035x^2$ με $S = 1.70352$.

Επιλέγοντας πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού προκύπτει το σύστημα

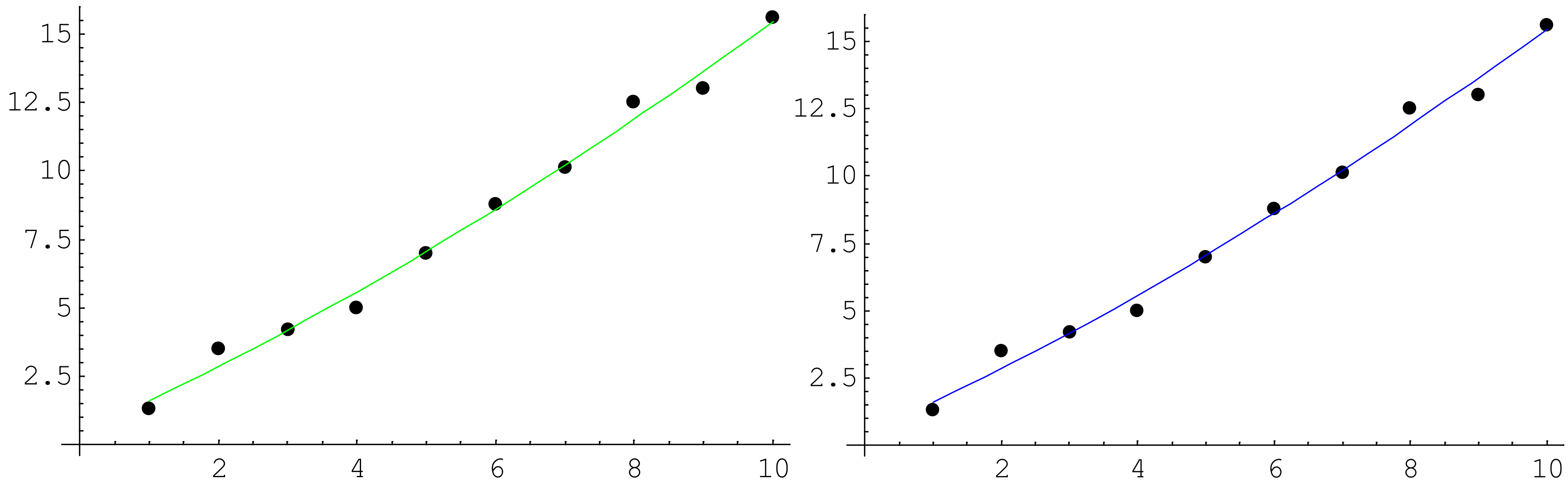
$$na_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i a_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} a_2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,3} a_3 = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i a_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} a_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,3} a_2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,4} a_3 = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} a_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,3} a_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,4} a_2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,5} a_3 = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} f_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,3} a_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,4} a_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,5} a_2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,6} a_3 = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,3} f_i$$

Η συνάρτηση παρεμβολής είναι $P_3\left(x\right) = 0.45 + 1.116x + 0.0432x^2 - 0.0005x^3$
($S = 1.70273$)



Παρεμβολή ελαχίστων τετραγώνων με πολυώνυμο 2^{ου} (αριστερά) και 3^{ου} (δεξιά) βαθμού.

Εφαρμογή της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων σε 2 διαστάσεις:

<u>Παράδειγμα</u>:

Δίδεται ο πίνακας δεδομένων:

$x_{1,i}$	0	0	0	1	2	1	1	2	2
$x_{2,i}$	0	1	2	0	0	1	2	1	2
y_i	15	12	15	20	16	18	13	26	21

Ζητείται το πολυώνυμο παρεμβολής $P_1(x_1, x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Ελαχιστοποιείται η ποσότητα $S = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i} \right)^2$

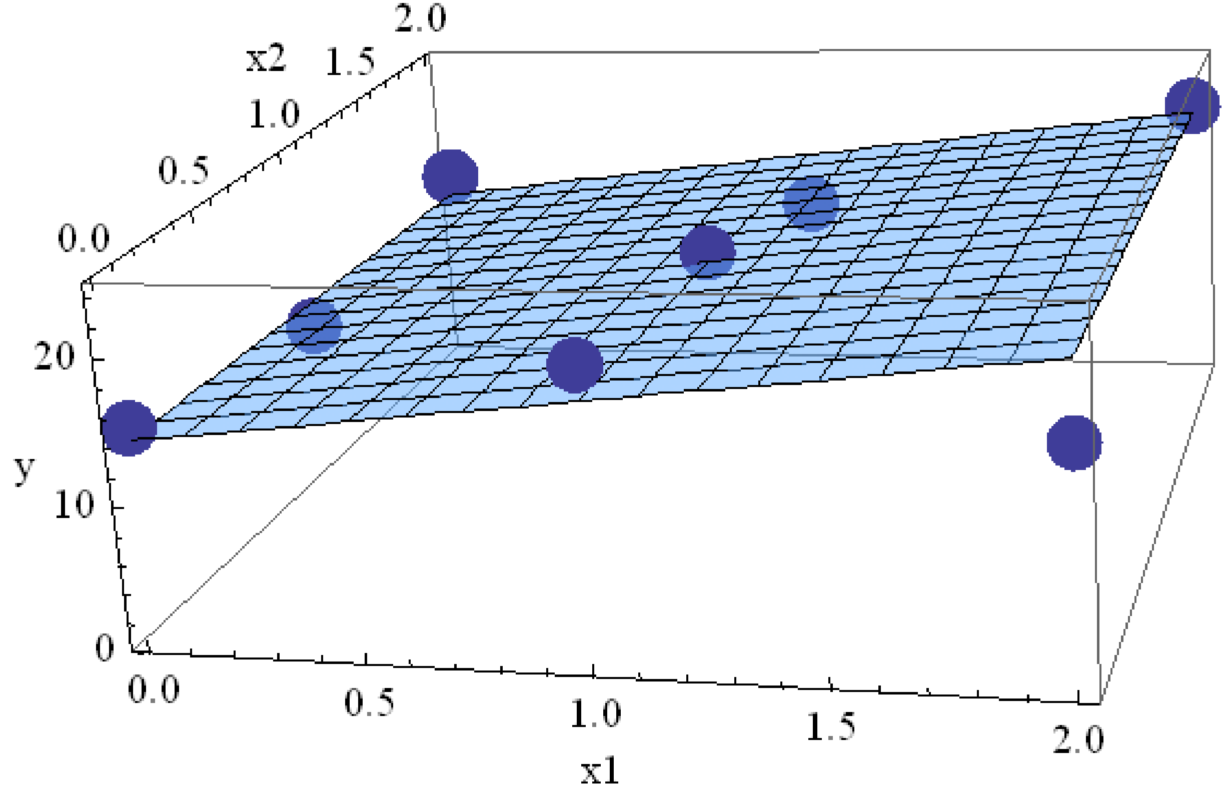
Πρέπει να επιλυθεί το γραμμικό σύστημα: $\dfrac{\partial S}{\partial a_0}=0 \quad \dfrac{\partial S}{\partial a_1}=0 \quad \dfrac{\partial S}{\partial a_2}=0$

Μετά τη εύρεση των παραγώγων το σύστημα ξαναγράφεται στη μορφή

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1\,i}^{2} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2\,i}^{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{2i}y_i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 15 & 9 \\ 9 & 9 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 156 \\ 177 \\ 154 \end{bmatrix}$$

Επιλύεται το σύστημα και προκύπτουν οι άγνωστοι συντελεστές: $a_1=\dfrac{7}{2},\ a_2=-\dfrac{1}{3},\ a_0=\dfrac{85}{6}$

$$P_1(x_1, x_2) = \frac{85}{6} + \frac{7}{2}x_1 - \frac{1}{3}x_2$$



Παρεμβολή ελαχίστων τετραγώνων με πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού σε δύο διαστάσεις.

Παράδειγμα: **Παρεμβολή ελαχίστων τετραγώνων με εκθετικές συναρτήσεις βάσεις**

Με βάση τον παρακάτω πίνακα δεδομένων βρείτε με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων τους συντελεστές της συνάρτησης παρεμβολής $f_1(x) = c_0 + c_1 e^x$

x_i	0	1	2	3	5
y_i	1	4	10	40	200

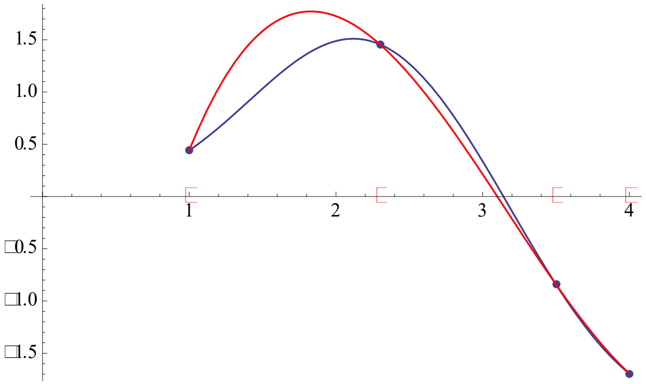
$$S = \sum_{i=1}^{5}\left(y_i - c_0 - c_1 e^{x_i}\right)^2 \qquad \frac{\partial S}{\partial c_0} = 2\sum_{i=1}^{5}\left(y_i - c_0 - c_1 e^{x_i}\right)(-1) = 0 \qquad \frac{\partial S}{\partial c_1} = 2\sum_{i=1}^{5}\left(y_i - c_0 - c_1 e^{x_i}\right)\left(-e^{x_i}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} 5c_0 + \sum_{i=1}^{5}\left(e^{x_i}\right)c_1 &= \sum_{i=1}^{5}\left(y_i\right) \\ \sum_{i=1}^{5}\left(e^{x_i}\right)c_0 + \sum_{i=1}^{5}\left(e^{2x_i}\right)c_1 &= \sum_{i=1}^{5}\left(y_i e^{x_i}\right) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 5c_0 + 179.6c_1 &= 255 \\ 179.6c_0 + 22492.9c_1 &= 30571.8 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} c_0 &= 3.05 \\ c_1 &= 1.33 \end{aligned}$$

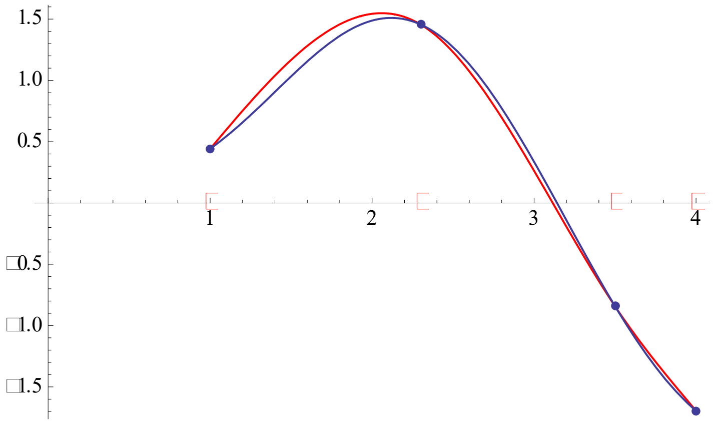
Γενίκευση: $f_m(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j e^{jx}$ (αποδεικνύεται ότι η επιλογή των c_j είναι μοναδική).

Παράδειγμα:

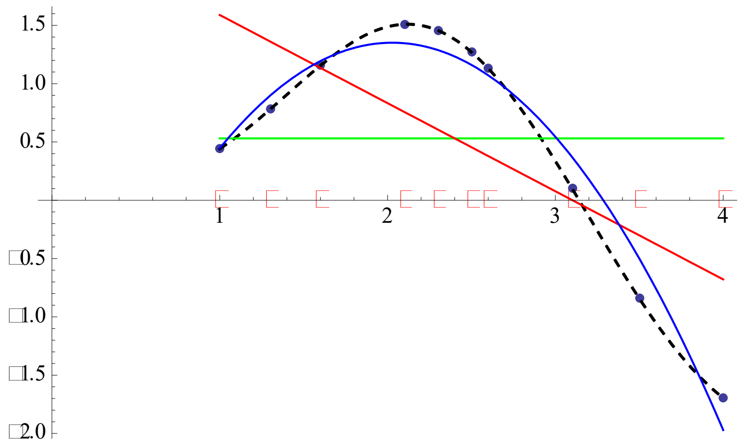
Τυπικά αποτελέσματα αριθμητικής παρεμβολής της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{2x^3+1}{3+e^x}\sin x$ στο διάστημα $x\in[1,4]$.



Newton and Lagrange



Cubic splines



Least square methods

3.5 Παρεμβολή με ορθογώνια πολυώνυμα

Εφαρμόζεται η μεθοδολογία των ελαχίστων τετραγώνων όπου οι συναρτήσεις βάσης είναι ορθογώνια πολυώνυμα (όχι μονώνυμα) και **ΔΕΝ απαιτείται επίλυση αλγεβρικού συστήματος**.

Έστω ότι προσεγγίζεται μία συνάρτηση $f(x) \in [a,b]$ με ένα γραμμικό συνδυασμό της μορφής:

$$f(x) \cong \sum_{j=0}^{m} c_j \Phi_j(x)$$

όπου οι συναρτήσεις βάσεις $\Phi_j(x)$ είναι ορθογώνια πολυώνυμα στο $[a,b]$, δηλαδή

$$\int_a^b w(x)\Phi_j(x)\Phi_k(x)\,dx = 0,\ j \neq k \qquad \text{και} \qquad \int_a^b w(x)\Phi_j(x)\Phi_k(x)\,dx = d_k,\ j = k$$

Legendre $P_n(x)$: ορθογώνια στο διάστημα $[-1,1]$ με συνάρτηση βαρύτητας $w(x)=1$.

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right),\ \ldots \qquad P_n(x)=\frac{2n-1}{n}xP_{n-1}(x)-\frac{n-1}{n}P_{n-2}(x)$$

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=0,\ n\neq m \qquad \text{και} \qquad \int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\frac{2}{2n+1},\ n=m$$

Laguerre $L_n(x)$: ορθογώνια στο διάστημα $[0,\infty)$ με συνάρτηση βαρύτητας $w(x)=e^{-x}$.

$$L_0(x)=1,\ L_1(x)=-x+1,\ L_2(x)=x^2-4x+2,\ \ldots\ L_n(x)=(2n-x-1)L_{n-1}(x)-(n-1)^2L_{n-2}(x)$$

$$\int_{0}^{\infty}e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx=0,\ n\neq m \qquad \text{και} \qquad \int_{0}^{\infty}e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx=\frac{\Gamma(n+1)}{n!},\ n=m$$

Σημείωση: οι συναρτήσεις Gamma με ακέραιες τιμές ορίζονται ως εξής: $\Gamma(n+1)=\int_{0}^{\infty}t^n e^{-t}dt=n!$

Chebyshev $T_n(x)$: ορθογώνια στο διάστημα $[-1,1]$ με συνάρτηση βαρύτητας $w(x)=1/\sqrt{1-x^2}$.

$T_0(x)=1,\ T_1(x)=x,\ T_2(x)=2x^2-1,\ \ldots$ $\qquad T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)$

$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_n(x)T_m(x)dx=0,\ n\neq m$ και $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_n(x)T_m(x)dx=\frac{\pi}{2},\ n=m\neq 0$

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_n(x)T_m(x)dx=\pi,\quad n=m=0$$

Hermite $H_n(x)$: ορθογώνια στο διάστημα $(-\infty,\infty)$ με συνάρτηση βαρύτητας $w(x)=e^{-x^2}$.

$H_0(x)=1,\ H_1(x)=2x,\ H_2(x)=4x^2-2,\ \ldots$ $\quad H_n(x)=2xH_{n-1}(x)-2(n-1)H_{n-2}(x)$

$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx=0,\ n\neq m$ και $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx=\sqrt{\pi}\,2^n n!,\ n=m$

Ορίζεται τα υπόλοιπα: $r(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m} c_j \Phi_j(x)$

Στη συνέχεια ελαχιστοποιείται η ποσότητα $S = \int_a^b w(x)\left[r(x)\right]^2 dx$ όπου $w(x)$ οι αντίστοιχες συναρτήσεις βαρύτητας. Αναγκαίες συνθήκες για την ελαχιστοποίηση του S είναι

$$\frac{\partial S}{\partial c_k} = \frac{\partial}{\partial c_k}\left(\int_a^b w(x)\left[r(x)\right]^2 dx\right) = \frac{\partial}{\partial c_k}\left(\int_a^b w(x)\left[f(x) - \sum_{j=0}^{m} c_j \Phi_j(x)\right]^2 dx\right) =$$

$$= \int_a^b w(x)\frac{\partial}{\partial c_k}\left[f(x) - \sum_{j=0}^{m} c_j \Phi_j(x)\right]^2 dx = \int_a^b 2w(x)\left[f(x) - \sum_{j=0}^{m} c_j \Phi_j(x)\right]\Phi_k(x)dx = 0, \quad 0 \le k \le m$$

οι οποίες οδηγούν στο γραμμικό σύστημα

$$\int_a^b w(x)\sum_{j=0}^{m} c_j \Phi_j(x)\Phi_k(x)\,dx = \int_a^b w(x)\Phi_k(x)f(x)\,dx, \qquad 0 \le k \le m$$

ή

$$\sum_{j=0}^{m} c_j \int_a^b w(x)\Phi_j(x)\Phi_k(x)\,dx = \int_a^b w(x)\Phi_k(x)f(x)\,dx, \qquad 0 \le k \le m$$

Το σύστημα είναι στη μορφή $Ax = b$ και επιλύεται για τους άγνωστους συντελεστές c_j.

Όμως, εφαρμόζοντας τις σχέσεις ορθογωνιότητας $\int_a^b w(x)\Phi_j(x)\Phi_k(x)\,dx = 0,\ k \ne j$,

ο πίνακας A ανάγεται σε διαγώνιο πίνακα και οι συντελεστές προκύπτουν από τις σχέσεις:

$$c_k = \frac{\int_a^b w(x)\Phi_k(x)f(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\Phi_k(x)\Phi_k(x)\,dx} = \frac{1}{d_k}\int_a^b w(x)\Phi_k(x)f(x)\,dx = \frac{1}{d_k}\sum_{i=1}^{n} w_i \Phi_k(x_i) f(x_i), \quad 0 \le k \le m$$

Παράδειγμα: Προσεγγίζεται με ορθογώνια πολυώνυμα **Legendre** στο διάστημα [−1,1] η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x^3+1}{3+e^x}\sin x$

Έστω $f(x)=c_0P_0(x)+c_1P_1(x) \;\Rightarrow\; r(x)=f(x)-c_0P_0(x)-c_1P_1(x), \quad m=1<<n$

$S=\int_{-1}^{1} w(x)\left[f(x)-c_0P_0(x)-c_1P_1(x)\right]^2 dx$ όπου $w(x)=1$.

Αναγκαίες συνθήκες για την ελαχιστοποίηση του S είναι $\dfrac{\partial S}{\partial c_0}=\dfrac{\partial S}{\partial c_1}=0$

$$\frac{\partial S}{\partial c_0}=\frac{\partial}{\partial c_0}\left(\int_{-1}^{1}\left[r(x)\right]^2 dx\right)=\frac{\partial}{\partial c_0}\left(\int_{-1}^{1}\left[f(x)-c_0P_0(x)-c_1P_1(x)\right]^2 dx\right)=$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{\partial}{\partial c_0}\left[f(x)-c_0P_0(x)-c_1P_1(x)\right]^2 dx=\int_{-1}^{1}2\left[f(x)-c_0P_0(x)-c_1P_1(x)\right]P_0(x)\,dx=0 \Rightarrow$$

$$\int_{-1}^{1}\left[c_0P_0\left(x\right)+c_1P_1\left(x\right)\right]P_0\left(x\right)dx=\int_{-1}^{1}\left[f\left(x\right)\right]P_0\left(x\right)dx \Rightarrow$$

$$c_0\int_{-1}^{1}P_0\left(x\right)P_0\left(x\right)dx+c_1\int_{-1}^{1}P_1\left(x\right)P_0\left(x\right)dx=\int_{-1}^{1}f\left(x\right)P_0\left(x\right)dx \Rightarrow c_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f\left(x\right)dx\simeq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}w_if\left(x_i\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial c_1}=\frac{\partial}{\partial c_1}\left(\int_{-1}^{1}\left[r\left(x\right)\right]^2dx\right)=\frac{\partial}{\partial c_1}\left(\int_{-1}^{1}\left[f\left(x\right)-c_0P_0\left(x\right)-c_1P_1\left(x\right)\right]^2dx\right)=$$

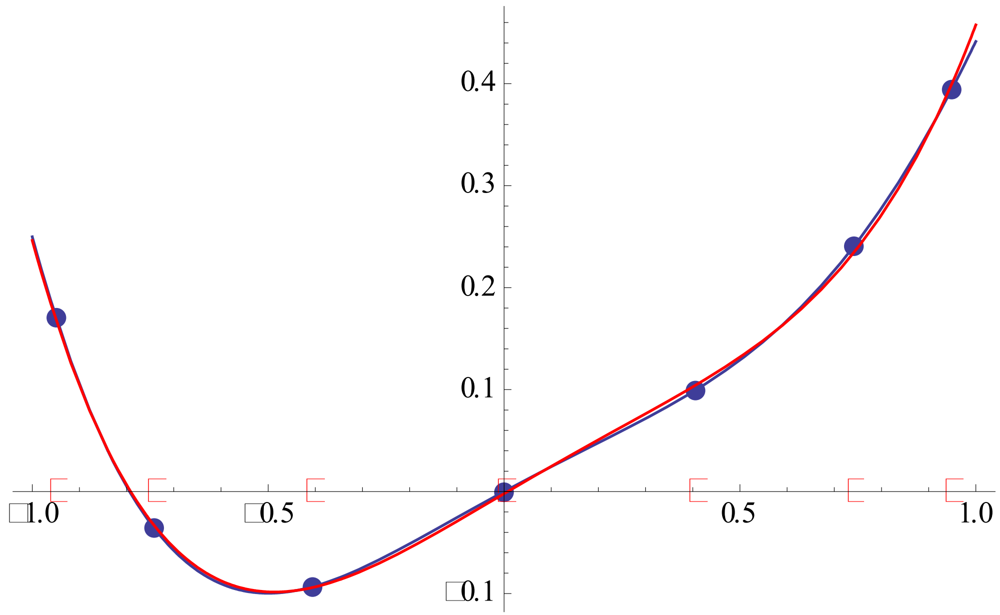
$$=\int_{-1}^{1}\frac{\partial}{\partial c_1}\left[f\left(x\right)-c_0P_0\left(x\right)-c_1P_1\left(x\right)\right]^2dx=\int_{-1}^{1}2\left[f\left(x\right)-c_0P_0\left(x\right)-c_1P_1\left(x\right)\right]P_1\left(x\right)dx=0 \Rightarrow$$

$$\int_{-1}^{1}\left[c_0P_0\left(x\right)+c_1P_1\left(x\right)\right]P_1\left(x\right)dx=\int_{-1}^{1}\left[f\left(x\right)\right]P_1\left(x\right)dx \Rightarrow$$

$$c_0\int_{-1}^{1}P_0\left(x\right)P_1\left(x\right)dx+c_1\int_{-1}^{1}P_1\left(x\right)P_1\left(x\right)dx=\int_{-1}^{1}f\left(x\right)P_1\left(x\right)dx \Rightarrow c_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}f\left(x\right)P_1\left(x\right)dx\simeq\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n}w_ix_if\left(x_i\right)$$

Αριθμητικά αποτελέσματα παίρνουμε εφαρμόζοντας **αριθμητική ολοκλήρωση Gauss-Legendre**.

Αποτελέσματα αριθμητικής παρεμβολής με ορθογώνια πολυώνυμα Legendre με $n=7$ και $m=4$ της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{2x^3+1}{3+e^x}\sin x$ στο διάστημα $[-1,1]$:



$$f(x)=c_0P_0(x)+c_1P_1(x)+c_2P_2(x)+c_3P_3(x)+c_4P_4(x)=0.324x^4-0.166x^3-0.017x^2+0.272x-0.0021$$

Ασκήσεις:

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{1+5x^2}$. Με βάση τα σημεία $x_0=-1$, $x_1=-1/3$, $x_2=1/3$, $x_3=1$ και τις αντίστοιχες τιμές $f(x_i)$, $i=0,1,2,3$ εφαρμόστε κυβικές splines και βρείτε τα πολυώνυμα $S_i(x)$, $i=0,1,2$ με την υπόθεση ότι $S_0''(x_0)=S_2''(x_3)=0$.

2. Μια εναλλακτική στρατηγική στη μέθοδο των κυβικών splines είναι να χρησιμοποιούνται στα πρώτα δύο υποδιαστήματα $x_0 \le x \le x_2$ και στα δύο τελευταία υποδιαστήματα $x_{n-2} \le x \le x_n$ μόνο από ένα πολυώνυμο $3^{ης}$ τάξης. Με βάση αυτή τη προσέγγιση διατυπώστε την ελαφρά τροποποιημένη μαθηματική επεξεργασία ώστε να προκύψει το σύστημα των εξισώσεων για τον υπολογισμό των άγνωστων συντελεστών των πολυωνύμων $3^{ης}$ τάξης.

3. Έστω τα δεδομένα $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$. Διατυπώστε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για την εύρεση της συνάρτησης παρεμβολής $y(x)=af(x)+bg(x)$ όπου $f(x)$ και $g(x)$ είναι γνωστές συναρτήσεις.

4. Ένα εικονικό πείραμα παράγει τα εξής τέσσερα ζεύγη δεδομένων

x	−2.0	−0.9	+0.5	+1.2
y	−2.0	1.2	1.0	−1.5

Να εκτιμηθεί η τιμή της y στο σημείο x=0 με i) παρεμβολή Lagrange και ii) παρεμβολή κυβικών splines.

5. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sin x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Με βάση τα σημεία $x_0=-\frac{\pi}{2}, x_1=0, x_2=\frac{\pi}{2}$ και τις αντίστοιχες τιμές $f_0=-1, f_1=0, f_2=1$ εφαρμόστε παρεμβολή Lagrange και παρεμβολή κυβικών splines και βρείτε τα πολυώνυμα παρεμβολής. Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας.

   Λαμβάνοντας υπόψη ότι $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ (επιπλέον δεδομένα) εφαρμόστε τη μέθοδο παρεμβολής κυβικών splines ελαφρώς τροποποιημένη και βρείτε τα πολυώνυμα παρεμβολής. Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας ως προς τη σημαντικότητα των επιπλέον δεδομένων.

   Προτείνετε επιγραμματικά τρόπους βελτίωσης των παραπάνω αποτελεσμάτων.

6. Το ιξώδες του νερού μ (10^{-3} Ns/m^2) σε διάφορες θερμοκρασίες T (^{o}C) δίδεται στον παρακάτω πίνακα:

T	0	5	20	30
μ	1.79	1.52	1.00	0.78

   Εφαρμόστε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και βρείτε ένα γραμμικό πολυώνυμο παρεμβολής της μορφής: $\mu(T)=aT+b$

7. Ο πληθυσμός μιας μικρής κοινότητας έχει αυξηθεί ραγδαία τα τελευταία 20 χρόνια σύμφωνα με τα εξής δεδομένα:

t	0	5	10	15	20
p	98	210	447	950	2008

   Εφαρμόστε ένα εκθετικό μοντέλο παρεμβολής και εκτιμήστε τον πληθυσμό της κοινότητας μετά από 5 έτη ($t=25$).

8. Θεωρείστε το εξής πρόβλημα παρεμβολής: Έστω ότι $x_0, x_1, ..., x_n$ είναι διακριτοί πραγματικοί αριθμοί και $y_0, y_1, ..., y_n$ τα αντίστοιχα δεδομένα. Η συνάρτηση παρεμβολής είναι

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j e^{jx}$$

έτσι ώστε $f_n(x_i) = y_i$, $i = 0,1,...,n$. Στη συνέχεια με βάση τον πίνακα δεδομένων

x_i	0	1	2	3	5
y_i	1	4	10	40	200

βρείτε με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων τους συντελεστές της συνάρτησης παρεμβολής $f_1(x) = c_0 + c_1 e^x$

9. Να βρεθούν με τη μέθοδο των κυβικών “splines” για τα δεδομένα

x	1	4	9	20
$f(x)$	1	16	81	400

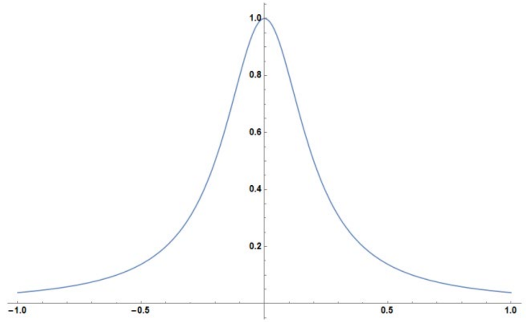
οι τιμές παρεμβολής της $f(x)$ στα σημεία 2, 7 και 17. Σχολιάστε την ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

10. Δίδεται ο πίνακας δεδομένων:

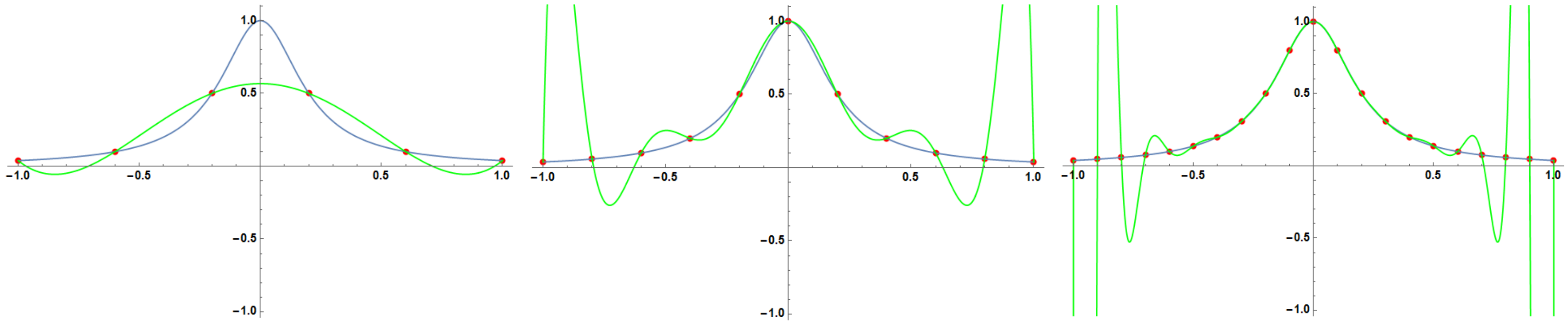
x_1	0	0	0	1	2	1	1	2	2
x_2	0	1	2	0	0	1	2	1	2
y	15	12	15	20	16	18	13	26	21

Βρείτε το πολυώνυμο παρεμβολής $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων

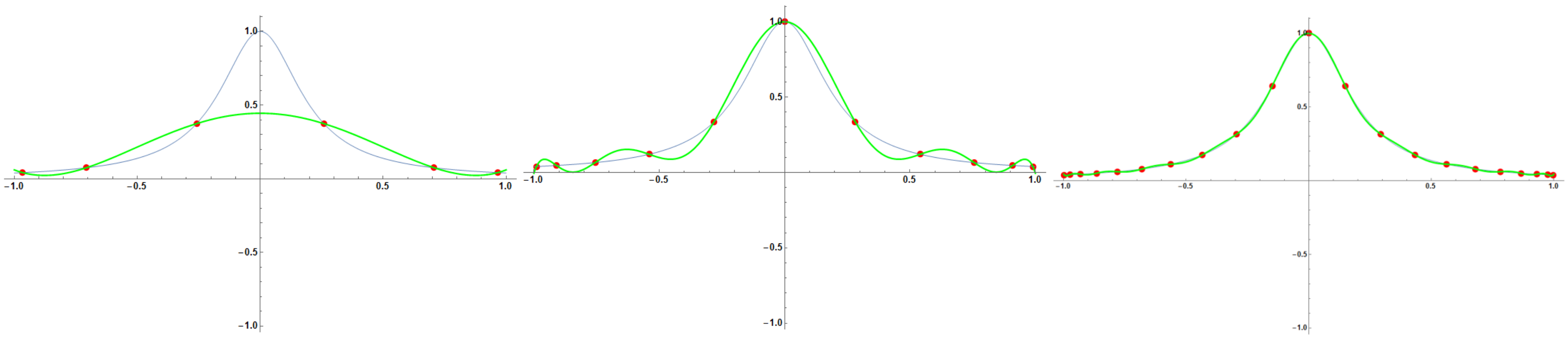
11. Να προσεγγιστεί με πολυωνυμική παρεμβολή η συνάρτηση Runge που προσεγγίζει την $y(x)=\dfrac{1}{1+25x^2}$ στο διάστημα $[-1,1]$ χρησιμοποιώντας σημεία παρεμβολής που απέχουν μεταξύ τους α) ίσες και β) όχι ίσες αποστάσεις. Στη δεύτερη περίπτωση να χρησιμοποιηθούν ως σημεία παρεμβολής οι ρίζες του πολυωνύμου Chebyshev. Επίσης, να εφαρμοστεί η μέθοδος των κυβικών splines.



Γραφική παράσταση συνάρτησης



Γραφική παράσταση πολυωνυμικής παρεμβολής με ισαπέχοντα σημεία (n=5, 10, 20).



Γραφική παράσταση πολυωνυμικής παρεμβολής όπου ως σημεία παρεμβολής επιλέγονται οι ρίζες των πολυωνύμων Chebyshev (n=5, 10, 20).

12. Έστω ότι έχουμε στη διάθεσή μας μετά από συστηματικές και ακριβείς μετρήσεις τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος σε εκατό χρονικές στιγμές στη διάρκεια ενός έτους. Να επιλεγεί η πλέον κατάλληλη, κατά την άποψή σας, μέθοδος παρεμβολής. Αιτιολογήστε την επιλογή σας.