Κεφ. 2: Επίλυση συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων

2.1 Επίλυση απλών εξισώσεων

2.2 Επίλυση συστημάτων με απευθείας μεθόδους

- 2.2.1 Μέθοδοι Gauss, Gauss-Jordan
- 2.2.2 Παραγοντοποίηση LU (ειδικές περιπτώσεις: Cholesky, Thomas)
- 2.2.3 Νόρμες πινάκων, δείκτης κατάστασης πίνακα, ασταθή συστήματα

2.3 Επίλυση συστημάτων με επαναληπτικές μεθόδους

- 2.3.1 Μέθοδος Jacobi
- 2.3.2 Μέθοδος Gauss-Seidel
- 2.3.3 Σύγκριση επαναληπτικών μεθόδων και ορισμός φασματικής ακτίνας

2.4 Μέθοδος Newton-Raphson

2.1 Επίλυση εξισώσεων

Παραδείγματα προβλημάτων θερμοδυναμικής, στατικής, μηχανικής, ρευστών, κτλ., που απαιτείται ο υπολογισμός των ριζών αλγεβρικών εξισώσεων:

Η **καταστατική εξίσωση των Beattie και Bridgman** δίδεται από την σχέση

$$P(T,V) = \frac{RT}{V} + \frac{\beta}{V^2} + \frac{\gamma}{V^3} + \frac{\delta}{V^4}$$

όπου τα β, γ, δ είναι γνωστές συναρτήσεις της θερμοκρασίας. Να βρεθεί ο όγκος του αερίου σε γνωστές τιμές της πίεση και θερμοκρασίας ή η θερμοκρασία του αερίου σε γνωστές τιμές της πίεσης και του όγκου.

Η εξίσωση που περιγράφει την **παραμόρφωση μιας ελαστικής δοκού** που παραλαμβάνει ένα γραμμικά μεταβαλλόμενο φορτίο είναι

$$y(x) = \frac{w_0}{120EIL}(-x^5 + 2L^2x^3 - L^4x)$$

Να βρεθεί το σημείο της μέγιστης παραμόρφωσης και στη συνέχεια η τιμή της (E=50.000kN/cm^2, I=30.000cm^4, L=450cm, w_0=1,75kN/cm).

Η **συγκέντρωση του οξυγόνου** σε ένα ποτάμι κατάντη του σημείου εξόδου αστικών λυμάτων δίδεται από την σχέση

$$c(x) = 10 - 20(e^{-0.2x} - e^{-0.75x})$$

όπου x η απόσταση από το σημείο εξόδου. Να προσδιοριστεί σε ποια απόσταση η συγκέντρωση του οξυγόνου είναι c=5.

Στη μηχανική ρευστών ο **συντελεστής τριβής** $f = f(\mathrm{Re})$ δίδεται από τη εξίσωση

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.87\,ln\left(Re\sqrt{f}\right) - 0.8$$

Υπολογίστε τον συντελεστή τριβής για Re=300.000.

Η παρακάτω εξίσωση εφαρμόζεται στον υπολογισμό της **ειδικής θερμότητας του αέρα**. Να βρεθεί η θερμοκρασία που αντιστοιχεί σε c_p=1.2kJ/(kgK).

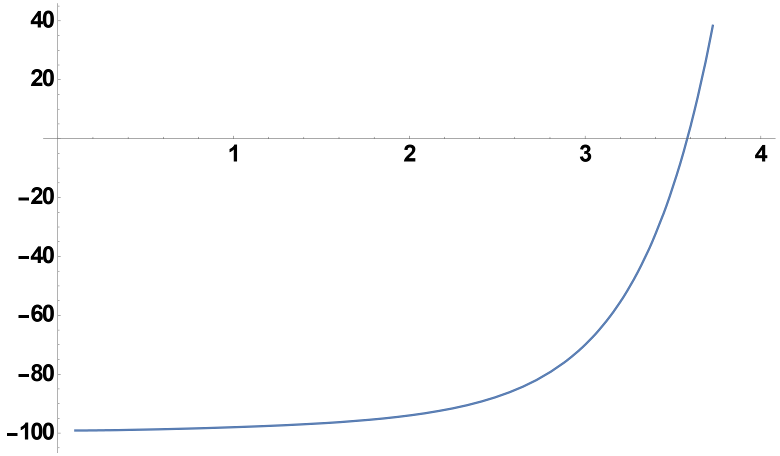
$$c_p = 0.99403 + 1.671*10^{-4}*T + 9.7215*10^{-8}*T^2 - 9.5838*10^{-11}*T^3 + 1.9520*10^{-14}*T^4$$

2.1.1 Μέθοδος διχοτόμησης και γραμμικής παρεμβολής

Ζητείται η ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα $\Delta x = x_2 - x_1$ (π.χ. $x + x^x - 100 = 0$).

Αλγόριθμος: Ορίζεται σημείο $x_3 = (x_1 + x_2)/2$

- Εάν $f(x_1)f(x_3) < 0$ τότε αντικαθίσταται το x_3 με $x_4 = (x_1 + x_3)/2$
- Εάν $f(x_1)f(x_3) > 0$ τότε αντικαθίσταται το x_1 με x_3 και το παλιό x_3 με $x_4 = (x_2 + x_3)/2$



$$x + x^x - 100 = 0$$

Με τον τρόπο αυτό το διάστημα που βρίσκεται η ρίζα διχοτομείται συνεχώς.

Αφού η ρίζα είναι στο διάστημα $\left[x_1, x_2\right]$ το μέγιστο αρχικό λάθος είναι $\Delta x / 2$ και μετά από n διχοτομήσεις θα είναι $\Delta x / 2^{n+1}$.

Αντίστοιχη είναι και η μέθοδος της **γραμμικής παρεμβολής** με μόνη διαφορά ότι η νέα τιμή προκύπτει από τη σχέση: $\dfrac{f\left(x_1\right)}{x_3 - x_1} = \dfrac{f\left(x_2\right)}{x_3 - x_2}$

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η ρίζα της εξίσωσης $f(x)=\cos(x)\cosh(x)+1=0$ στο διάστημα $[1.6,2]$

x_L	x_R	x_M	$f(x_L)$	$f(x_R)$	$f(x_M)$
1.6	2.0	1.8	0.9247	-0.5656	0.2940
1.8	2.0	1.9	0.2940	-0.5656	-0.1049
1.8	1.9	1.85	0.2940	-0.1049	0.1020
1.85	1.9	1.875	0.1020	-0.1049	0.0004
1.875	1.9	1.8875	0.0004	-0.1049	-0.0518
1.875	1.8875	1.8813	0.0004	-0.0518	-0.0255
…	…	…	…	…	…
1.875	1.8754	1.8752	0.0004	-0.0012	-0.0004

2.1.2 Μέθοδος απλών αντικαταστάσεων

Η αρχική εξίσωση $f(x)=0$ γράφεται στη μορφή $x=F(x)$.

Στη συνέχεια εφαρμόζεται η επαναληπτική διαδικασία $x^{(n+1)}=F\left(x^{(n)}\right)$

Η επαναληπτική διαδικασία τερματίζεται όταν $\left|\dfrac{x^{(n+1)}-x^{(n)}}{x^{(n+1)}}\right|<\varepsilon$ ή $\left|x^{(n+1)}-x^{(n)}\right|<\varepsilon$

Σύγκλιση:

Έστω x η αναλυτική λύση και $x^{(n)}$ η αριθμητική λύση και $\sigma^{(n)}=x^{(n)}-x$ το σφάλμα.

Επιλύουμε ως προς $x^{(n)}$ και αντικαθιστούμε στον επαναληπτικό αλγόριθμο:

$$x+\sigma^{(n+1)}=F\left(x+\sigma^{(n)}\right)=F(x)+\sigma^{(n)}\frac{dF}{dx}\Rightarrow\sigma^{(n+1)}=\sigma^{(n)}\frac{dF}{dx}$$

Η μέθοδος συγκλίνει εάν $\left|\dfrac{dF}{dx}\right|_{x=x^{(n)}}<1$

<u>Παραδείγματα</u>: $f\left(x\right)=x^3-3x^2-3.88x+3.192=0 \;\Rightarrow$

$$x=\frac{x^3-3x^2+3.192}{3.88}=F\left(x\right)\,, \qquad F'\left(x\right)=\frac{3x^2-6x}{3.88}$$

Αριθμός επανάληψης n	$x^{(n)}$	$F\left(x^{(n)}\right)$	$F'\left(x^{(n)}\right)$
1	0.500	0.662	-0.600
2	0.662	0.559	-0.685
3	0.559	0.626	-0.623
4	0.626	0.583	-0.665
5	0.583	0.611	-0.639
6	0.611	0.593	
7	0.593	0.603	

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 3.88x + 12.824 = 0, \qquad \text{Αναλυτική λύση: } x = 2.4937$$

$$F(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 12.824}{3.88}, \quad F'(x) = \frac{3x^2 - 6x}{3.88}$$

Αριθμός επανάληψης n	$x^{(n)}$	$F\left(x^{(n)}\right)$	$F'\left(x^{(n)}\right)$
1	2.500	2.4997	0.9659
2	2.4997	2.4995	0.9653
3	2.4995	2.4993	
…	….	…..	…..
31	2.4953	2.4952	0.9555
32	2.4952	2.4951	0.9553
33	2.4951	2.4950	0.9551

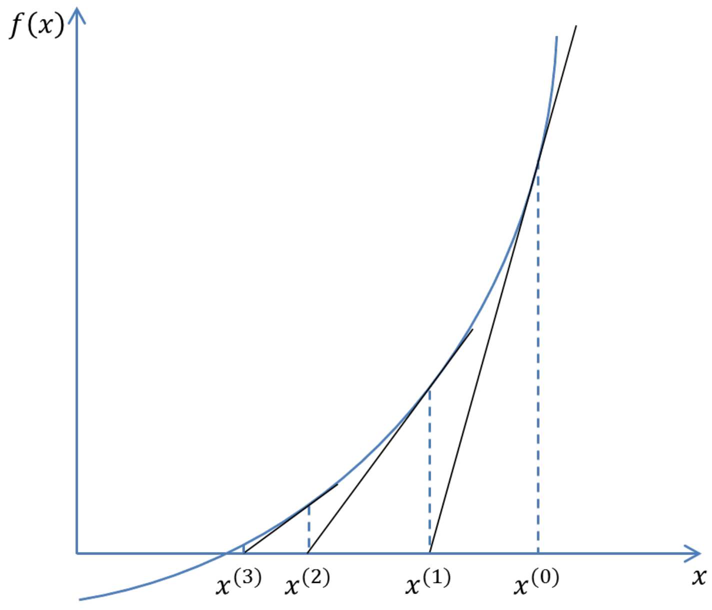
2.1.3 Μέθοδος Newton

Έστω x η αναλυτική λύση και $x^{(n)}$ η αριθμητική λύση και $\sigma^{(n)}=x^{(n)}-x$ το σφάλμα.

$$f(x)=0 \Rightarrow f\left(x^{(n)}-\sigma^{(n)}\right)=0 \Rightarrow f\left(x^{(n)}\right)-\sigma^{(n)}\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x^{(n)}}=0 \Rightarrow \sigma^{(n)}=\frac{f\left(x^{(n)}\right)}{f'\left(x^{(n)}\right)} \Rightarrow$$

$$x^{(n)}-x=\frac{f\left(x^{(n)}\right)}{f'\left(x^{(n)}\right)} \Rightarrow x=x^{(n)}-\frac{f\left(x^{(n)}\right)}{f'\left(x^{(n)}\right)} \Rightarrow \quad x^{(n+1)}=x^{(n)}-\frac{f\left(x^{(n)}\right)}{f'\left(x^{(n)}\right)}$$

Γεωμετρική ερμηνεία:



Σύγκλιση:

Έστω x η αναλυτική λύση και $x^{(n)}$ η αριθμητική λύση και $\sigma^{(n)} = x^{(n)} - x$ το σφάλμα.

<u>Αλγόριθμος</u>: $x + \sigma^{(n+1)} = x + \sigma^{(n)} - \dfrac{f\left(x^{(n)}\right)}{f'\left(x^{(n)}\right)} \Rightarrow \sigma^{(n+1)} = \dfrac{\sigma^{(n)} f'\left(x^{(n)}\right) - f\left(x^{(n)}\right)}{f'\left(x^{(n)}\right)}$

<u>Ανάπτυγμα Taylor</u>:

$$f(x) = 0 \Rightarrow f\left(x^{(n)} - \sigma^{(n)}\right) = f\left(x^{(n)}\right) - \sigma^{(n)} \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x^{(n)}} + \frac{1}{2}\left[\sigma^{(n)}\right]^2 \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x^{(n)}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(x^{(n)}\right) - \sigma^{(n)} f'\left(x^{(n)}\right) = -\frac{1}{2}\left[\sigma^{(n)}\right]^2 \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x^{(n)}}$$

Αντικαθιστούμε την τελευταία σχέση στον αριθμητή της προηγούμενης:

$$\sigma^{(n+1)} = \left[\sigma^{(n)}\right]^2 \frac{f''\left(x^{(n)}\right)}{2f'\left(x^{(n)}\right)}.$$ Η μέθοδος συγκλίνει εάν $\left|\frac{f''\left(x^{(n)}\right)}{2f'\left(x^{(n)}\right)}\right| < 1$.

Απλοποιημένη Newton: $x^{(n+1)} = x^{(n)} - f\left(x^{(n)}\right)\frac{x^{(n)} - x^{(n-1)}}{f\left(x^{(n)}\right) - f\left(x^{(n-1)}\right)}$, $\quad \sigma^{(n+1)} \approx \sigma^{(n)}\sigma^{(n-1)}$

Αλγόριθμος 3ης τάξης: $x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f\left(x^{(n)}\right)}{f'\left(x^{(n)}\right)} - \frac{1}{2}\frac{\left[f\left(x^{(n)}\right)\right]^2 f''\left(x^{(n)}\right)}{\left[f'\left(x^{(n)}\right)\right]^3}$, $\quad \sigma^{(n+1)} \approx \left[\sigma^{(n)}\right]^3$

<u>Παράδειγμα</u>: $f(x)=x^2-3x+2=0$,   Αναλυτική λύση: $x=2$

$f'(x)=2x-3,\ f''(x)=2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dfrac{f''(2)}{2f'(2)}=1} \quad \Rightarrow \quad \sigma^{(n+1)}=\left[\sigma^{(n)}\right]^2$

n	Μέθοδος Newton			Μέθοδος απλών επαναλήψεων		
	$x^{(n)}$	$\sigma^{(n)}$	$\left[\sigma^{(n-1)}\right]^2$	$x^{(n)}$	$\sigma^{(n)}$	$0.75\sigma^{(n-1)}$
1	2.1	0.1		2.1	0.1	
2	2.008333	0.008333	0.01	2.0736	0.0736	0.075
3	2.000068	0.000068	0.000069	2.0545	0.0545	0.0552
4	2.000000			2.0405	0.0405	0.0409
…				….	….	
9				2.0070	0.0070	
10				2.0052	0.0052	0.0053

Απλές επαναλήψεις: $x^{(n)}=F(x)=\sqrt{3x-2}$, $F'(x)=\dfrac{3}{2}(3x-2)^{-1/2} \Rightarrow F'(2)=0.75$

Μέθοδος Newton για πολλαπλές ρίζες:

Είναι προφανές ότι στη περίπτωση πολλαπλών ριζών η μέθοδος Newton αστοχεί ή στη καλύτερη περίπτωση η σύγκλιση είναι αντίστοιχη με αυτή των γραμμικών μεθόδων (καθώς πλησιάζουμε τη ρίζα όχι μόνο το $f\left(x^{(n)}\right)$ αλλά και το $f'\left(x^{(n)}\right)$ τείνουν στο μηδέν.

Απόδειξη:

Έχει αποδειχθεί ότι η εξέλιξη του σφάλματος στη μέθοδο Newton δίδεται από την σχέση:

$$\sigma^{(n+1)} = \left[\sigma^{(n)}\right]^2 \frac{f''\left(x^{(n)}\right)}{2f'\left(x^{(n)}\right)}$$

Αν η ρίζα είναι πολλαπλότητας 2 τότε

$$f'(x) = 0 \Rightarrow f'\left(x^{(n)}\right) - \sigma^{(n)} f''\left(x^{(n)}\right) = 0 \Rightarrow f'\left(x^{(n)}\right) = \sigma^{(n)} f''\left(x^{(n)}\right)$$

Η τελευταία σχέση αντικαθίσταται στη γενική έκφραση και προκύπτει ότι:

$$\sigma^{(n+1)} = \left[\sigma^{(n)}\right]^2 \frac{f''\left(x^{(n)}\right)}{2\sigma^{(n)} f''\left(x^{(n)}\right)} = \frac{1}{2}\sigma^{(n)}$$

Επομένως εφαρμόζονται οι παρακάτω δύο εναλλακτικοί αλγόριθμοι ώστε η σύγκλιση να παραμείνει τετραγωνική.

A) Έστω $u = \dfrac{f\left(x^{(n)}\right)}{f'\left(x^{(n)}\right)}$ και $u' = \dfrac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}$

Σημειώνεται ότι οι ρίζες της u είναι οι ίδιες με αυτές της αρχικής συνάρτησης f.

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{u\left(x^{(n)}\right)}{u'\left(x^{(n)}\right)} \Rightarrow \quad x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x)f'(x)}{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}$$

<u>Παράδειγμα</u> (Chapra & Canale, σελ. 165):

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x-3)(x-1)(x-1) = 0$$

n	Μέθοδος Newton		**Μέθοδος Newton για πολλαπλές ρίζες**	
	$x^{(n)}$	$\sigma^{(n)}$ (%)	$x^{(n)}$	$\sigma^{(n)}$ (%)
0	0	100	0	100
1	0.4286	57	1.105263	11
2	0.6857	31	1.003082	0.31
3	0.8329	17	1.000002	0.00024
4	0.9133	8.7		
5	0.9558	4.4		
6	0.9777	2.2		

B) Έστω ότι αναζητείται ρίζα πολλαπλότητας 2:

$$f(x)=0 \Rightarrow f\left(x^{(n)}-\sigma^{(n)}\right)=0 \Rightarrow f\left(x^{(n)}\right)-\sigma^{(n)} f'\left(x^{(n)}\right)+\frac{1}{2}\left[\sigma^{(n)}\right]^2 f''\left(x^{(n)}\right)=0$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow f'\left(x^{(n)}-\sigma^{(n)}\right)=0 \Rightarrow f'\left(x^{(n)}\right)-\sigma^{(n)} f''\left(x^{(n)}\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma^{(n)}}{2} f'\left(x^{(n)}\right)-\frac{\left[\sigma^{(n)}\right]^2}{2} f''\left(x^{(n)}\right)=0$$

$$f\left(x^{(n)}\right)-\frac{\sigma^{(n)}}{2} f'\left(x^{(n)}\right)=0 \Rightarrow \sigma^{(n)}=2\frac{f\left(x^{(n)}\right)}{f'\left(x^{(n)}\right)} \Rightarrow \boxed{x^{(n+1)}=x^{(n)}-2\frac{f\left(x^{(n)}\right)}{f'\left(x^{(n)}\right)}}$$

Γενική περίπτωση ρίζας πολλαπλότητας m: $\boxed{x^{(n+1)}=x^{(n)}-m\frac{f\left(x^{(n)}\right)}{f'\left(x^{(n)}\right)}}$

2.2 Επίλυση συστημάτων με απευθείας μεθόδους

Εξετάζονται συστήματα όπου ο αριθμός των εξισώσεων ισούται με τον αριθμό των αγνώστων.

Οι απευθείας μέθοδοι εφαρμόζονται μόνο σε γραμμικά συστήματα της μορφής

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \quad \text{ή} \quad \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots. \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \quad \text{ή} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Ο αριθμός των πράξεων που απαιτούνται για την επίλυση του συστήματος με τις απευθείας μεθόδους είναι τάξης n^3 [$O\left(n^3\right)$].

- Το σύστημα $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ έχει λύση εάν ο πίνακας $\boldsymbol{A}$ είναι αντιστρέψιμος (ή εάν $\det(\boldsymbol{A})\neq 0$).
- Το σύστημα $\boldsymbol{Ax}=0$ έχει μη μηδενική λύση εάν ο πίνακας $\boldsymbol{A}$ είναι μη αντιστρέψιμος (ή εάν $\det(\boldsymbol{A})=0$).

Οι **ιδιοτιμές** ή **χαρακτηριστικές τιμές** λ ενός πίνακα $\boldsymbol{A}$ προκύπτουν επιλύοντας συστήματα όπως το σύστημα $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$ ή $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=0$, όπου $\boldsymbol{x}$ είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα ή χαρακτηριστικό διάνυσμα.

Το σύστημα αυτό έχει μη μηδενική λύση μόνο όταν $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0$ που οδηγεί στην χαρακτηριστική εξίσωση

$$c_0+c_1\lambda+\ldots+c_{n-1}\lambda^{n-1}+\lambda^n=0$$

από την οποία προκύπτουν οι ιδιοτιμές $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$.

Φασματική ακτίνα πίνακα $\boldsymbol{A}$: $\rho(\boldsymbol{A})=\max\{|\lambda_i|\}$, $i=1,2,\ldots,n$.

Επίλυση του συστήματος $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ με τον **κανόνα του Cramer**: $x_i=\dfrac{|\boldsymbol{A}_i|}{|\boldsymbol{A}|}$, $i=1,2,\dots,n$ όπου

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n21} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad |\boldsymbol{A}_i|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & b_i & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(η στήλη i αντικαθίσταται με το διάνυσμα $\boldsymbol{b}$)

Πλεονέκτημα: Η λύση είναι σε **κλειστή μορφή**

Μειονέκτημα: Ο **αριθμός πράξεων** για σύστημα n εξισώσεων είναι $O(n!)$.

Για σύστημα 10 εξισώσεων ο αριθμός πράξεων είναι $O(10^6)$.

2.2.1 Απαλοιφές (elimination) Gauss και Gauss-Jordan

Κύρια χαρακτηριστικά **απαλοιφής Gauss**:
Α) Αντικατάσταση κάθε στοιχείου της διαγωνίου με μονάδα
Β) Αντικατάσταση κάθε στοιχείου κάτω από τη διαγώνιο με μηδέν
Γ) Αντικατάσταση όλων των άλλων στοιχείων με τις τιμές που προκύπτουν από τα παραπάνω βήματα χωρίς να αλλοιώνεται το αρχικό σύστημα.

Κύρια χαρακτηριστικά **απαλοιφής Gauss-Jordan**:
Δ) Αντικατάσταση κάθε στοιχείου πάνω από τη διαγώνιο με μηδέν εκτός της στήλης $n+1$
Ε) Αντικατάσταση κάθε στοιχείου της στήλης $n+1$ με τις τιμές που προκύπτουν από τα παραπάνω βήματα χωρίς να αλλοιώνεται το αρχικό σύστημα

Αριθμός πράξεων απαλοιφής Gauss:
$\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6}$ προσθαφαιρέσεις, $\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6}$ πολλαπλασιασμούς, $\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$ διαιρέσεις
Αριθμός πράξεων απαλοιφής Gauss-Jordan:
$\frac{n^3}{2}+\frac{n}{2}$ προσθαφαιρέσεις, $\frac{n^3}{2}-\frac{n}{2}$ πολλαπλασιασμούς, n^2 διαιρέσεις

Παράδειγμα: Απαλοιφή Gauss **με μερική οδήγηση**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ \mathbf{5} & 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \to r_1/5} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.4 & 0.4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to r_2 - \mathrm{r}_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.4 & 0.4 \\ 0 & 2 & -0.6 & 2.6 \\ 0 & \mathbf{-3} & 7 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.4 & 0.4 \\ 0 & -3 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & -0.6 & 2.6 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_3/(-3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.4 & 0.4 \\ 0 & 1 & -2.33 & -0.66 \\ 0 & 2 & -0.6 & 2.6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 - 2\mathrm{r}_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.4 & 0.4 \\ 0 & 1 & -2.33 & -0.66 \\ 0 & 0 & 4.06 & 3.93 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_3/4.06} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.4 & 0.4 \\ 0 & 1 & -2.33 & -0.66 \\ 0 & 0 & 1 & 0.968 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0.4 + 0.4x_3 \\ x_2 = -0.66 + 2.33x_3 \\ x_3 = 0.968 \end{array} \Rightarrow \quad \underline{x_1 = 0.787} \quad \underline{x_2 = 1.590} \quad \underline{x_3 = 0.968}$$

Παράδειγμα: Να λυθεί το σύστημα $\begin{bmatrix} 0.005 & 1 & | & 0.5 \\ 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$ με αριθμητική **2 σημαντικών ψηφίων**.

A) Χωρίς οδήγηση:

$$\begin{bmatrix} 0.005 & 1 & | & 0.5 \\ 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 200 & | & 100 \\ 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 200 & | & 100 \\ 0 & -199 & | & -99 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 200 & | & 100 \\ 0 & -200 & | & -99 \end{bmatrix} \to$$

$$\to x_2 = \frac{99}{200} = 0.495 \to 0.50 \ , \quad x_1 = 100 - 200 \times 0.5 \to x_1 = 0 \ \text{ ΛΑΘΟΣ!!}$$

B) Με οδήγηση:

$$\begin{bmatrix} 0.005 & 1 & | & 0.5 \\ 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0.005 & 1 & | & 0.5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0.995 & | & 0.495 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1.0 & | & 0.50 \end{bmatrix} \to$$

$$\to x_2 = 0.5 \ , \quad x_1 = 1 - 0.5 \to x_1 = 0.5 \ \text{ ΣΩΣΤΟ σε 2 σημαντικά ψηφία}$$

Η λύση με ακρίβεια 4 σημαντικών ψηφίων είναι $x_1 = 0.5025$ και $x_2 = 0.4975$

<u>Παράδειγμα (**ολική οδήγηση**)</u>: Επιλύστε το παρακάτω σύστημα με απαλοιφή Gauss ολικής οδήγησης και σχολιάστε την ακρίβεια του αποτελέσματος:

$$\begin{pmatrix} 0.003 & 0.213 & 0.332 \\ 0.216 & 0.376 & 0.477 \\ 0.173 & 0.663 & 0.626 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.235 \\ 0.128 \\ 0.285 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0.173 & 0.663 & 0.626 \\ 0.216 & 0.376 & 0.477 \\ 0.003 & 0.213 & 0.332 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.285 \\ 0.128 \\ 0.235 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0.663 & 0.173 & 0.626 \\ 0.376 & 0.216 & 0.477 \\ 0.213 & 0.003 & 0.332 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.285 \\ 0.128 \\ 0.235 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0.261 & 0.944 \\ 0 & 0.118 & 0.122 \\ 0 & -0.0526 & 0.131 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.430 \\ -0.0337 \\ 0.143 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.261 & 0.944 \\ 0 & -0.0526 & 0.131 \\ 0 & 0.118 & 0.122 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.430 \\ 0.143 \\ -0.0337 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0.944 & 0.261 \\ 0 & 0.131 & -0.0526 \\ 0 & 0.122 & 0.118 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.430 \\ 0.143 \\ -0.0337 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.944 & 0.261 \\ 0 & 1 & -0.402 \\ 0 & 0 & 0.167 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.430 \\ 1.092 \\ -0.167 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0396 \\ 0.69 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Σημειώνεται ότι η απλή απαλοιφή Gauss χωρίς μερική ή ολική οδήγηση είναι ένας ασταθής αλγόριθμός διότι είναι πιθανόν ο οδηγός να είναι μηδέν με αποτέλεσμα να γίνονται διαιρέσεις με μηδέν και το αποτέλεσμα να απειρίζεται ή να είναι ένας μικρός αριθμός και στις πράξεις που πραγματοποιούνται να αυξάνουν σημαντικά τα σφάλματα στρογγυλοποίησης. Επομένως, η εφαρμογή της απαλοιφής Gauss χωρίς μερική ή ολική οδήγηση είναι δυνατόν να οδηγεί σε λάθος αποτελέσματα.

Αντίθετα, ο αλγόριθμος απαλοιφής Gauss με μερική ή ολική οδήγηση είναι ευσταθής. Μεταξύ της μερικής και ολικής απαλοιφής Gauss συνήθως επιλέγεται η πρώτη επειδή το υπολογιστικό κόστος είναι μικρότερο και οδηγεί σε σωστά αποτελέσματα.

2.2.2 Παραγοντοποίηση (factorization or decomposition) LU, μέθοδος Cholesky και Αλγόριθμος Thomas

Ο πίνακας $\boldsymbol{A}$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τη σχέση $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$ όπου $\boldsymbol{L}$ και $\boldsymbol{U}$ είναι ένας κάτω και ένας άνω τριγωνικός πίνακας αντίστοιχα.

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{LUx} = \boldsymbol{b}$$

Στη συνέχεια ορίζεται ένα νέο διάνυσμα $\boldsymbol{y}$ έτσι ώστε $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$ που αντικαθίσταται στο παραπάνω σύστημα και προκύπτει $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$.

Επιλύεται το κάτω τριγωνικό σύστημα και βρίσκεται το διάνυσμα $\boldsymbol{y}$ και στη συνέχεια επιλύεται το άνω τριγωνικό σύστημα $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$ και προκύπτει το διάνυσμα $\boldsymbol{x}$.

Ο αριθμός πράξεων είναι αντίστοιχος με αυτόν της απαλοιφής Gauss.

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}\Rightarrow\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \dots & & \dots & \dots \\ & & & \\ a_{n1} & & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & & 0 \\ \dots & & & 0 & 0 \\ \dots & & & & 0 \\ l_{n1} & \dots & \dots & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} & \dots & l_{11}u_{1n} \\ l_{21} & l_{21}u_{12}+l_{22} & l_{21}u_{13}+l_{22}u_{23} & \dots & l_{21}u_{1n}+l_{22}u_{2n} \\ l_{31} & l_{31}u_{12}+l_{32} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+l_{33} & \dots & l_{31}u_{1n}+l_{32}u_{2n}+l_{33}u_{3n} \\ \dots & & & & \dots \\ l_{n1} & l_{n1}u_{12}+l_{n2} & l_{n1}u_{13}+l_{n2}u_{23}+l_{n3} & \dots & \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}u_{kn}+l_{nn} \end{bmatrix}$$

Γενικές εκφράσεις:

Στοιχεία της στήλης i του $\boldsymbol{L}$: $l_{ji} = a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki}$, $j = i, i+1, \ldots, n$

Στοιχεία της γραμμής i του $\boldsymbol{U}$: $u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \right)$, $j = i+1, \ldots, n$

Παράδειγμα: Εφαρμόστε παραγοντοποίηση LU στον πίνακα

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} \\ l_{21} & l_{21}u_{12} + l_{22} & l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} \\ l_{31} & l_{31}u_{12} + l_{32} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Μέθοδος Cholesky

Στη περίπτωση που ο πίνακας A είναι **συμμετρικός** ($A = A^T$) και **θετικά ορισμένος** (δηλαδή για τον οποίο ισχύει $x^T A x > 0$ για κάθε $x \in R^n$) αποδεικνύεται, εφαρμόζοντας την παραγοντοποίηση LU, ότι ο πίνακας $U = L^T$ και επομένως $A = LL^T$

Η ιδιότητα αυτή είναι σημαντική επειδή μειώνει δραστικά τον αναγκαίο αριθμό πράξεων.

Ο συνολικός αριθμός πράξεων που απαιτούνται στη μέθοδο Cholesky είναι $O\left(n^2\right)$.

<u>Παράδειγμα</u>: Εφαρμόστε παραγοντοποίηση Cholesky στον συμμετρικό πίνακα

$$[A]=\begin{bmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix} = LL^T = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}l_{11} & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} \\ l_{21}l_{11} & l_{21}l_{21} + l_{22}l_{22} & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} \\ l_{31}l_{11} & l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} & l_{31}l_{31} + l_{32}l_{32} + l_{33}l_{33} \end{bmatrix}$$

Οι προϋποθέσεις για τη παραγοντοποίηση Cholesky ο πίνακας Α πρέπει να είναι:
α) συμμετρικός και β) θετικά ορισμένος

Εφαρμόζονται οι παρακάτω εξισώσεις για τα στοιχεία του πίνακα L:

$$l_{ki} = \frac{a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} l_{kj}}{l_{ii}}, \; i = 1, k-1 \quad (*) \qquad l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2} \quad (**)$$

Για τη 1η $(k=1)$ εφαρμόζεται η Εξ. (**): $l_{11} = \sqrt{a_{11} - 0} = \sqrt{6} = 2.4495$

Για τη 2η σειρά $(k=2)$, αρχικά εφαρμόζεται η Εξ. (*) $(i=1)$ και στη συνέχεια η Εξ.(**) $(i=2)$:

$$l_{21} = \frac{a_{21} - 0}{l_{11}} = \frac{15}{2.4495} = 6.1237 \qquad l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{55 - (6.1237)^2} = 4.1833$$

Για τη 3η σειρά $(k=3)$ αρχικά εφαρμόζεται η Εξ. (*) για τα δύο πρώτα στοιχεία $(i=1,2)$ και μετά την Εξ. (**) $(i=3)$

$$l_{31}=\frac{a_{31}-0}{l_{11}}=\frac{55}{2.4495}=22.454 \qquad l_{32}=\frac{a_{32}-l_{21}l_{31}}{l_{22}}=\frac{225-6.1237(22.454)}{4.1833}=20.917$$

$$l_{33}=\sqrt{a_{33}-l_{31}^2-l_{32}^2}=\sqrt{979-(22.454)^2-(20.917)^2}=6.1101$$

Άρα, ο πίνακας L είναι: $[L]=\begin{bmatrix} 2.4495 & 0 & 0 \\ 6.1237 & 4.1833 & 0 \\ 22.454 & 20.917 & 6.1101 \end{bmatrix}$

Σημείωση: Εναλλακτικά, η απαλοιφή Gauss μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παραγοντοποίηση του πίνακα $\boldsymbol{A}$. Στη περίπτωση αυτή εφαρμόζεται και οδήγηση.

Αλγόριθμος Thomas: Παραγοντοποίηση $\boldsymbol{LU}$ σε τριδιαγώνιο σύστημα

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}\Rightarrow\begin{bmatrix} a_1 & \gamma_1 & 0 & & 0 \\ \beta_2 & a_2 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & & \ldots & & \ldots \\ & 0 & & & \gamma_{n-1} \\ 0 & & 0 & \beta_n & a_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 & 0 & & & 0 \\ l_2 & d_2 & 0 & & 0 \\ 0 & & & 0 & 0 \\ \ldots & 0 & & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & l_n & d_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & u_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & u_2 & \ldots & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & 1 & u_{n-1} \\ 0 & & & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} d_1 & d_1u_1 & 0 & \ldots & 0 \\ l_2 & l_2u_1+d_2 & d_2u_2 & \ldots & 0 \\ 0 & l_3 & l_3u_2+d_3 & \ldots & \\ \ldots & & & & d_{n-1}u_{n-1} \\ 0 & & 0 & l_n & l_nu_{n-1}+d_n \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$d_1=a_1$$
$$l_i=\beta_i, i=2,\ldots,n$$
$$u_1=\gamma_1/d_1$$
$$d_i=a_i-l_iu_{i-1}, i=2,\ldots,n$$
$$u_i=\gamma_i/d_i, i=2,\ldots,n-1$$

Έστω το τριδιαγώνιο σύστημα: $$\begin{bmatrix} a_1 & \gamma_1 & 0 & & 0 \\ \beta_2 & a_2 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & & \dots & & \dots \\ \dots & 0 & & & \gamma_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \beta_n & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ \dots \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \\ \dots \\ \\ f_n \end{bmatrix}$$

Αλγόριθμος Thomas:

$$e_1 = a_1 \quad , \quad e_i = a_i - \frac{\beta_i \gamma_{i-1}}{e_{i-1}} \quad , \quad i = 2,\dots,n$$

$$g_1 = \frac{f_1}{e_1} \; , \quad g_i = \frac{f_i - \beta_i g_{i-1}}{e_i} \quad , \quad i = 2,\dots,n$$

$$x_n = g_n \; , \quad x_i = g_i - \frac{\gamma_i}{e_i} x_{i+1} \quad , \; i = n-1,\dots,2,1$$

Ο συνολικός αριθμός πράξεων που απαιτούνται στον αλγόριθμο Thomas είναι $O(n)$.

<u>Παράδειγμα</u>: Να επιλυθεί το σύστημα $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 0 \\ 2000 \end{pmatrix}$ με αλγόριθμο Thomas.

Αλγόριθμος Thomas:

$$e_1 = a_1 = 4, \qquad e_2 = a_2 - \frac{\beta_2\gamma_1}{e_1} = 4 - \frac{(-1)(-1)}{4} = 3.75, \qquad e_3 = a_3 - \frac{\beta_3\gamma_2}{e_2} = 4 - \frac{(-1)(-1)}{3.75} = 3.73333$$

$$g_1 = \frac{f_1}{e_1} = \frac{2000}{4} = 500, \qquad g_2 = \frac{f_2 - \beta_2 g_1}{e_2} = \frac{0-(-1)500}{3.75} = 133.333,$$

$$g_3 = \frac{f_3 - \beta_3 g_2}{e_3} = \frac{2000-(-1)133.33}{3.7333} = 571.43$$

$$x_3 = g_3 = 571.43, \qquad x_2 = g_2 - \frac{\gamma_2}{e_2}x_3 = 571.43 - \frac{(-1)}{3.75}571.43 = 285.71,$$

$$x_1 = g_1 - \frac{\gamma_1}{e_1}x_2 = 500 - \frac{(-1)}{4}285.71 = 571.43$$

2.2.3 Νόρμες πινάκων, δείκτης κατάστασης πίνακα, ασταθή συστήματα

Νόρμες διανυσμάτων:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$: νόρμα l_2 ή Ευκλείδεια

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$: νόρμα l_1 ή αθροίσματος

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$: νόρμα l_∞ or μεγίστου

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$: νόρμα l_p ή γενική $p \in [1, \infty)$

Για κάθε νόρμα διανύσματος μπορούμε να ορίσουμε την αντίστοιχη νόρμα πίνακα.

Νόρμες πινάκων – ορισμός: $\|A\| = \max\limits_{\substack{x \neq 0 \\ x \in R^n}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$

Νόρμα αθροίσματος γραμμών: $\|A\|_\infty = \max\limits_{\substack{x \neq 0 \\ x \in R^n}} \dfrac{\|Ax\|_\infty^{'}}{\|x\|_\infty} = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

Νόρμα αθροίσματος στηλών: $\|A\|_1 = \max\limits_{\substack{x \neq 0 \\ x \in R^n}} \dfrac{\|Ax\|_1^{'}}{\|x\|_1} = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

Ευκλείδεια νόρμα: $\|A\|_2 = \left[\rho\left(AA^T \right) \right]^{1/2}$

Σε Ερμιτιανούς πίνακες ισχύει ότι η ευκλείδεια νόρμα ισούται με την φασματική ακτίνα: $\|A\|_2 = \left[\rho\left(AA^* \right) \right]^{1/2} = \left[\rho\left(A^2 \right) \right]^{1/2} = \rho\left(A \right)$

Δείκτης κατάστασης

Εξετάζεται η ευστάθεια του συστήματος $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, ($\boldsymbol{A}\in R^n$ και είναι αντιστρέψιμος, $\boldsymbol{b}\in R^n$) όταν εισάγονται στο διάνυσμα $\boldsymbol{b}$, διαταραχές $\boldsymbol{\delta b}\in R^n$.

Τότε εάν $\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x}$ είναι η λύση του συστήματος ισχύει ότι

$$\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\delta x}\right)=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\delta b}\Rightarrow \boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{x}=\delta\boldsymbol{b}\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\delta x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\delta b}\Rightarrow\left\|\boldsymbol{\delta x}\right\|=\left\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\delta b}\right\|\Rightarrow\left\|\boldsymbol{\delta x}\right\|\le\left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\|\left\|\boldsymbol{\delta b}\right\|$$

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{Ax}\Rightarrow\left\|\boldsymbol{b}\right\|=\left\|\boldsymbol{Ax}\right\|\Rightarrow\left\|\boldsymbol{b}\right\|\le\left\|\boldsymbol{A}\right\|\left\|\boldsymbol{x}\right\|$$

Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες προκύπτει ότι

$$\left\|\boldsymbol{\delta x}\right\|\left\|\boldsymbol{b}\right\|\le\left\|\boldsymbol{A}\right\|\left\|\boldsymbol{x}\right\|\left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\|\left\|\boldsymbol{\delta b}\right\|\Rightarrow\frac{\left\|\boldsymbol{\delta x}\right\|}{\left\|\boldsymbol{x}\right\|}\le\left\|\boldsymbol{A}\right\|\left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\|\frac{\left\|\boldsymbol{\delta b}\right\|}{\left\|\boldsymbol{b}\right\|}$$

που αποτελεί μέτρηση του άνω φράγματος της αλλαγής στη λύση $\boldsymbol{x}$ που επιφέρει η εξωτερικά επιβαλλόμενης διαταραχής $\boldsymbol{\delta b}$.

Δείκτης κατάστασης πίνακα $\boldsymbol{A}$: $K(A)=\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|}\Big/\dfrac{\|\delta b\|}{\|b\|}=\|A\|\|A^{-1}\|$

Σημειώνεται ότι $K(\boldsymbol{A})>1$ Απόδειξη: $K(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\geq\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\|=\|\boldsymbol{I}\|=1$

Εάν $K(\boldsymbol{A})$ είναι κοντά στη μονάδα τότε ο πίνακας $\boldsymbol{A}$ είναι σε **καλή κατάσταση**.

Εάν $K(\boldsymbol{A})>>1$ τότε είναι ο πίνακας $\boldsymbol{A}$ σε **κακή κατάσταση**.

Ο δείκτης κατάστασης ορίζεται μόνο για αντιστρέψιμους πίνακες και εάν ο πίνακας τείνει να είναι ιδιόμορφος τότε $K(\boldsymbol{A})\to\infty$.

Για οποιαδήποτε νόρμα πίνακα ισχύει ότι $\rho(\boldsymbol{A})\leq\|\boldsymbol{A}\|$ και $\rho(\boldsymbol{A})=\lim\limits_{m\to\infty}\|\boldsymbol{A}^m\|^{1/m}$.

Αποδεικνύεται ότι $\lim\limits_{m\to\infty}\boldsymbol{A}^m=0$ αν και μόνο αν $\rho(\boldsymbol{A})<1$. Απόδειξη: Έστω λ μια ιδιοτιμή και $\boldsymbol{\upsilon}\neq 0$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Αφού $A^m\upsilon=\lambda^m\upsilon$ ισχύει ότι

$$0=\left(\lim_{m\to\infty}A^m\right)\upsilon=\left(\lim_{m\to\infty}A^m\upsilon\right)=\left(\lim_{m\to\infty}\lambda^m\upsilon\right)=\upsilon\left(\lim_{m\to\infty}\lambda^m\right)\Rightarrow\ \lim_{m\to\infty}\lambda^m=0\Rightarrow|\lambda|<1\Rightarrow\rho(\boldsymbol{A})<1$$

2.3 Επίλυση συστημάτων με απλές επαναληπτικές μεθόδους

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Qx} - \boldsymbol{Qx} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{Qx} = (\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{b} \Rightarrow$$

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Gx} + \boldsymbol{k}$, όπου $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A})$ και $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{b}$

Απλός επαναληπτικός αλγόριθμος: $\boldsymbol{x}^{(m+1)} = \boldsymbol{Gx}^{(m)} + \boldsymbol{k}$, όπου $\boldsymbol{G}$ ο πίνακας επανάληψης.

Έστω $\boldsymbol{\sigma}^{(m)} = \boldsymbol{x}^{(m)} - \boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^{(m+1)} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{\sigma}^{(m)} + \boldsymbol{x}\right) + \boldsymbol{k} = \boldsymbol{G\sigma}^{(m)} + \boldsymbol{Gx} + \boldsymbol{k} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^{(m+1)} = \boldsymbol{G\sigma}^{(m)}$

Αποδεικνύεται ότι $\boldsymbol{\sigma}^{(m)} = \boldsymbol{G\sigma}^{(m-1)} = \boldsymbol{G}^2\boldsymbol{\sigma}^{(m-2)} = \ldots = \boldsymbol{G}^m\boldsymbol{\sigma}^{(0)}$, όπου $\boldsymbol{\sigma}^{(0)}$ το αρχικό σφάλμα.

Επομένως $\lim_{m\to\infty}\boldsymbol{\sigma}^{(m)} = 0$ αν $\lim_{m\to\infty}\boldsymbol{G}^m = 0$ το οποίο ισχύει αν και μόνο αν $\rho(\boldsymbol{G}) < 1$.

Η επαναληπτική μέθοδος συγκλίνει αν η φασματική ακτίνα του πίνακα επανάληψης είναι μικρότερη της μονάδας.

Για την εφαρμογή των μεθόδων Jacobi και Gauss-Seidel διασπούμε τον αρχικό πίνακα συντελεστών του συστήματος ως εξής: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}$, όπου

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & & \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & & \\ \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ & & 0 & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & & \ldots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & & & 0 & 0 \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3.1 Μέθοδος Jacobi

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\Rightarrow\left(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\Rightarrow\boldsymbol{Dx}=-\left(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}\right)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{D}^{-1}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{D}\right)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}\Rightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{D}^{-1}\left(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}\Rightarrow\boldsymbol{x}=\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$$

Επομένως ο επαναληπτικός αλγόριθμος Jacobi δίδεται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{x}^{(m+1)}=\boldsymbol{G}_J\boldsymbol{x}^{(m)}+\boldsymbol{k}_J,\quad \text{όπου}\quad \boldsymbol{G}_J=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}\quad \text{και}\quad \boldsymbol{k}_J=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$$

Η μέθοδος συγκλίνει εάν $\rho\left(\boldsymbol{G}_J\right)<1$

Είναι προφανές ότι στη μέθοδο Jacobi $\boldsymbol{Q}\equiv\boldsymbol{D}$

Γράφοντας το σύστημα $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ στη μορφή

$$a_{ii}x_i = b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{i,i-1}x_{i-1} - a_{i,i+1}x_{i+1} - \ldots - a_{i,n}x_n = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j + b_i \;, \quad i = 1,\ldots,n,$$

Αλγόριθμος Jacobi: $$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[-\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(m)} + b_i\right]$$

Παράδειγμα:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 11 \\ -x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 16 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{11}{4} - \frac{2}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 \\ x_2 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_1 \\ x_3 &= \frac{16}{4} - \frac{2}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1^{(m+1)} &= \frac{11}{4} - \frac{2}{4}x_2^{(m)} - \frac{1}{4}x_3^{(m)} \\ x_2^{(m+1)} &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_1^{(m)} \\ x_3^{(m+1)} &= \frac{16}{4} - \frac{2}{4}x_1^{(m)} - \frac{1}{4}x_2^{(m)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(0)} &= 1 \\
x_2^{(0)} &= 1 \\
x_3^{(0)} &= 1
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{11}{4} - \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = 2 \\
x_2^{(1)} &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \\
x_3^{(1)} &= \frac{16}{4} - \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{13}{4}
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= \frac{11}{4} - \frac{2}{4}2 - \frac{1}{4}\frac{13}{4} = \frac{15}{16} \\
x_2^{(2)} &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}2 = \frac{5}{2} \\
x_3^{(2)} &= \frac{16}{4} - \frac{2}{4}2 - \frac{1}{4}2 = \frac{5}{2}
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
x_1^{(3)} &= 0.875 \\
x_2^{(3)} &= 1.97 \\
x_3^{(3)} &= 3.07
\end{aligned}
\Rightarrow \ldots
$$

Η επαναληπτική διαδικασία ολοκληρώνεται (τερματίζεται) όταν

$$\left| x_i^{(m+1)} - x_i^{(m)} \right| < \varepsilon_i \,, \quad i = 1, \ldots, n \qquad \text{ή} \qquad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{(m+1)} - x_i^{(m)} \right)^2} < \varepsilon$$

Η μέθοδος εφαρμόζεται χωρίς να εισάγουμε τα δεδομένα σε πινακοποιημένη μορφή!

Αλγόριθμος Jacobi με χαλάρωση: $x_i^{(m+1)} = (1-\omega)x_i^{(m)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} a_{ij}x_j^{(m)} \right]$, $i = 1, 2, \ldots, n$

Τυπική επαναληπτική μέθοδος Jacobi: $x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} a_{ij}x_j^{(m)} \right]$

Αλγόριθμος Jacobi με χαλάρωση υπό μορφή πινάκων:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Rightarrow (\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boldsymbol{x} = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{x} = (1-\omega)\boldsymbol{x} + \omega\left[\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}\right] \Rightarrow \boldsymbol{x} = \left[(1-\omega)\boldsymbol{I} + \omega\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}\right)\right]\boldsymbol{x} + \omega\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{x} = \left[\boldsymbol{I} - \omega\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}\right]\boldsymbol{x} + \omega\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{x}^{(m+1)} = \boldsymbol{G}_{J,relax}\boldsymbol{x}^{(m)} + \omega\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}, \quad \text{όπου} \quad \boldsymbol{G}_{J,relax} = \left[\boldsymbol{I} - \omega\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}\right]$$

2.3.2 Μέθοδος Gauss-Seidel

Γράφοντας το σύστημα $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ στη μορφή

$$a_{ii}x_i = b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{i,i-1}x_{i-1} - a_{i,i+1}x_{i+1} - \ldots - a_{i,n}x_n = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j \;,$$

Αλγόριθμος Gauss-Seidel δίδεται από τη σχέση:

$$a_{ii}x_i^{(m+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)} + b_i$$

<u>Παράδειγμα:</u>

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 11 \\ -x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 16 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{11}{4} - \frac{2}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 \\ x_2 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_1 \\ x_3 &= \frac{16}{4} - \frac{2}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1^{(m+1)} &= \frac{11}{4} - \frac{2}{4}x_2^{(m)} - \frac{1}{4}x_3^{(m)} \\ x_2^{(m+1)} &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_1^{(m+1)} \\ x_3^{(m+1)} &= \frac{16}{4} - \frac{2}{4}x_1^{(m+1)} - \frac{1}{4}x_2^{(m+1)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(0)} &= 1\\
x_2^{(0)} &= 1\\
x_3^{(0)} &= 1
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{11}{4} - \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = 2\\
x_2^{(1)} &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}2 = \frac{5}{2}\\
x_3^{(1)} &= \frac{16}{4} - \frac{2}{4}2 - \frac{1}{4}\frac{5}{2} = \frac{19}{8}
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= \frac{29}{32}\\
x_2^{(2)} &= \frac{125}{64}\\
x_3^{(2)} &= \frac{783}{256}
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
x_1^{(3)} &= 0.9990\\
x_2^{(3)} &= 1.995\\
x_3^{(3)} &= 2.996
\end{aligned}
\Rightarrow \ldots
$$

Jacobi (από παραπάνω):

$$
\begin{aligned}
x_1^{(0)} &= 1\\
x_2^{(0)} &= 1\\
x_3^{(0)} &= 1
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{11}{4} - \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = 2\\
x_2^{(1)} &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2\\
x_3^{(1)} &= \frac{16}{4} - \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{13}{4}
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= \frac{11}{4} - \frac{2}{4}2 - \frac{1}{4}\frac{13}{4} = \frac{15}{16}\\
x_2^{(2)} &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}2 = \frac{5}{2}\\
x_3^{(2)} &= \frac{16}{4} - \frac{2}{4}2 - \frac{1}{4}2 = \frac{5}{2}
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
x_1^{(3)} &= 0.875\\
x_2^{(3)} &= 1.97\\
x_3^{(3)} &= 3.07
\end{aligned}
\Rightarrow \ldots
$$

Πίνακας επανάληψης $\boldsymbol{G}_{GS}$ της μεθόδου Gauss-Seidel:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\Rightarrow(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\Rightarrow(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{x}=-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}\Rightarrow\boldsymbol{x}=-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}\Rightarrow\boldsymbol{x}=\left(\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$$

Επομένως ο επαναληπτικός αλγόριθμος Gauss-Seidel δίδεται από τη σχέση:

$\boldsymbol{x}^{(m+1)}=\boldsymbol{G}_{GS}\boldsymbol{x}^{(m)}+\boldsymbol{k}_{GS}$, όπου $\boldsymbol{G}_{GS}=\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{k}_{GS}=(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$

Η μέθοδος συγκλίνει εάν $\rho(\boldsymbol{G}_{GS})<1$ (στη μέθοδο Gauss-Seidel $\boldsymbol{Q}\equiv\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}$)

Οι μέθοδοι Jacobi και Gauss-Seidel εφαρμόζονται σε συστήματα $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ όπου ο πίνακας συντελεστών $\boldsymbol{A}$ είναι **κυρίαρχα διαγώνιος** ($|a_{ii}|\geq\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$, $i=1,\ldots,n$).

Μέθοδος **Gauss-Seidel** με χαλάρωση (**SOR**):

$$x_i^{(m+1)} = (1-\omega)x_i^{(m)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)} \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

όπου $\omega \in (0, 2]$ είναι ένας πραγματικός αριθμός και ονομάζεται συντελεστής χαλάρωσης. Για $\omega = 1$, η μέθοδος SOR ανάγεται στη μέθοδο GS.

Για $\omega > 1$ και $\omega < 1$, προκύπτει υπέρ-χαλάρωση και υπό-χαλάρωση αντίστοιχα.

Υπό μορφή πινάκων ο αλγόριθμός SOR γράφεται στη μορφή:

$$x^{(m+1)} = (D + \omega L)^{-1}\left[(1-\omega)D - \omega U\right]x^{(m)} + \omega(D + \omega L)^{-1} b$$

2.4 Μέθοδος Newton

Γενική μορφή συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων (μη γραμμικά συστήματα):

$$
\begin{aligned}
&f_1\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0 \\
&f_2\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0 \\
&... \\
&f_n\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0
\end{aligned}
$$

Μέθοδοι απλών επαναλήψεων (η μαθηματική επεξεργασία σύγκλισης δεν είναι εφικτή):

$$
\begin{aligned}
&x_1^{(k+1)} = F_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, ..., x_n^{(k)}\right) \\
&x_2^{(k+1)} = F_2\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, ..., x_n^{(k)}\right) \\
&... \\
&x_n^{(k+1)} = F_n\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_{n-1}^{(k)}, x_n^{(k)}\right)
\end{aligned}
$$

ή

$$
\begin{aligned}
&x_1^{(k+1)} = F_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, ..., x_n^{(k)}\right) \\
&x_2^{(k+1)} = F_2\left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, ..., x_n^{(k)}\right) \\
&... \\
&x_n^{(k+1)} = F_n\left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, ..., x_{n-1}^{(k+1)}, x_n^{(k)}\right)
\end{aligned}
$$

Τις περισσότερες φορές η σύγκλιση των μεθόδων απλών επαναλήψεων όταν εφαρμόζονται σε μη γραμμικά συστήματα είναι αργή.

Για το λόγο αυτό μη γραμμικά συστήματα επιλύονται κατά κύριο λόγο με τη μέθοδο **Newton ή Newton-Raphson**.

Εισαγωγικά εξετάζεται ένα σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2) &= 0 \end{aligned}$$

Έστω ότι x_1, x_2 είναι οι αναλυτικές λύσεις με $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}$ συμβολίζονται οι αντίστοιχες αριθμητικές μετά από k επαναλήψεις με τα σφάλματα να ορίζονται από τις σχέσεις $\sigma_1^{(k)} = x_1^{(k)} - x_1$ και $\sigma_2^{(k)} = x_2^{(k)} - x_2$.

$$\begin{aligned} f_1\left(x_1^{(k)} - \sigma_1^{(k)}, x_2^{(k)} - \sigma_2^{(k)}\right) &= 0 \\ f_2\left(x_1^{(k)} - \sigma_1^{(k)}, x_2^{(k)} - \sigma_2^{(k)}\right) &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} f_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right) - \sigma_1^{(k)} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}} - \sigma_2^{(k)} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}} &= 0 \\ f_2\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right) - \sigma_1^{(k)} \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}} - \sigma_2^{(k)} \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}} &= 0 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\sigma_1^{(k)}\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{x_1^{(k)},x_2^{(k)}}+\sigma_2^{(k)}\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{x_1^{(k)},x_2^{(k)}}&=f_1\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)}\right)\\ \sigma_1^{(k)}\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{x_1^{(k)},x_2^{(k)}}+\sigma_2^{(k)}\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{x_1^{(k)},x_2^{(k)}}&=f_2\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)}\right)\end{aligned}$$

ή $$\boxed{\begin{bmatrix} f_{1x_1} & f_{1x_2} \\ f_{2x_1} & f_{2x_2}\end{bmatrix}^{(k)}_{x_1^{(k)},x_2^{(k)}}\begin{bmatrix}\sigma_1^{(k)}\\ \sigma_2^{(k)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1\\ f_2\end{bmatrix}^{(k)}_{x_1^{(k)},x_2^{(k)}}}\Rightarrow$$

Επιλύοντας το γραμμικό σύστημα με απευθείας ή επαναληπτικές μεθόδους προκύπτουν τα $\sigma_1{}^{(n)}$ και $\sigma_2{}^{(n)}$. Έστω ότι εφαρμόζεται η μέθοδος Cramer (το σύστημα είναι μόλις 2 εξισώσεων:

$$\sigma_1^{(k)}=\frac{\begin{vmatrix} f_1 & f_{1x_2} \\ f_2 & f_{2x_2}\end{vmatrix}^{(k)}_{x_1^{(k)},x_2^{(k)}}}{\begin{vmatrix} f_{1x_1} & f_{1x_2} \\ f_{2x_1} & f_{2x_2}\end{vmatrix}^{(k)}_{x_1^{(k)},x_2^{(k)}}}=\left[\frac{f_1 f_{2x_2}-f_2 f_{1x_2}}{f_{1x_1}f_{2x_2}-f_{1x_2}f_{2x_1}}\right]^{(k)}_{x_1^{(k)},x_2^{(k)}}\qquad \sigma_2^{(k)}=\frac{\begin{vmatrix} f_{1x_1} & f_1 \\ f_{2x_1} & f_2\end{vmatrix}^{(k)}_{x_1^{(k)},x_2^{(k)}}}{\begin{vmatrix} f_{1x_1} & f_{1x_2} \\ f_{2x_1} & f_{2x_2}\end{vmatrix}^{(k)}_{x_1^{(k)},x_2^{(k)}}}=\left[\frac{f_2 f_{1x_1}-f_1 f_{2x_1}}{f_{1x_1}f_{2x_2}-f_{1x_2}f_{2x_1}}\right]^{(k)}_{x_1^{(k)},x_2^{(k)}}$$

Στη συνέχεια εισάγονται οι ορισμοί των σφαλμάτων και προκύπτει ο επαναληπτικός αλγόριθμος Newton για σύστημα 2 εξισώσεων:

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \left[\frac{f_1 f_{2x_2} - f_2 f_{1x_2}}{f_{1x_1} f_{2x_2} - f_{1x_2} f_{2x_1}} \right]^{(k)} \quad \text{και} \quad x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \left[\frac{f_2 f_{1x_1} - f_1 f_{2x_1}}{f_{1x_1} f_{2x_2} - f_{1x_2} f_{2x_1}} \right]^{(k)}$$

Σημειώνεται ότι **σε κάθε επανάληψη απαιτείται η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος**!!!

Απλοποιημένη **Newton**: $x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \omega \left[\frac{f_1}{f_{1x_1}} \right]^{(k)}$ και $x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \omega \left[\frac{f_2}{f_{2x_2}} \right]^{(k)}$

Παράδειγμα:

$$f_1(x_1,x_2)=\frac{1}{2}\sin(x_1x_2)-\frac{x_2}{4\pi}-\frac{x_1}{2}=0$$

$$f_2(x_1,x_2)=\left(1-\frac{1}{4\pi}\right)\left(e^{2x_1}-e\right)+\frac{ex_2}{\pi}-2ex_1=0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=-\frac{1}{2}+\frac{x_2\cos(x_1x_2)}{2} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2}=-\frac{1}{4\pi}+\frac{x_1\cos(x_1x_2)}{2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}=-2e+\left(2-\frac{1}{2\pi}\right)e^{2x_1} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}=\frac{e}{\pi}$$

Το σύστημα που επιλύεται σε κάθε επανάληψη είναι $\begin{bmatrix} f_{1x_1} & f_{1x_2} \\ f_{2x_1} & f_{2x_2} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \sigma_1^{(k)} \\ \sigma_2^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}^{(k)}$

και οι νέες τιμές προκύπτουν από τις σχέσεις $x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \sigma_1^{(k)}$, $x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \sigma_2^{(k)}$

Πίνακας αποτελεσμάτων

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$f_1^{(k)}$	$f_2^{(k)}$	$f_{1x_1}^{(k)}$	$f_{1x_2}^{(k)}$	$f_{2x_1}^{(k)}$	$f_{2x_2}^{(k)}$	$\sigma_1^{(k)}$	$\sigma_2^{(k)}$
0	0.400	3.000	0.0272	-0.0324	0.0435	-0.0071	-1.34	0.865	0.831	1.249
1	-0.431	1.751	-0.266	1.74	0.138	-0.236	-4.66	0.865	-0.186	1.018
2	-0.245	0.733	-0.0251	0.0303	-0.139	-0.200	-4.31	0.865	0.016	0.114
3	-0.261	0.619	0.0009	0.0003	-0.195	-0.208	-4.35	0.865	-0.0007	-0.003
4	-0.260	0.622	0.0000	0.0000	-0.193	-0.208	-4.34	0.865	0.0000	0.000
5	-0.260	0.622	0.0000	0.0000						

Σημείωση: οι συναρτήσεις και οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται στα σημεία $x_1^{(k)}$ και $x_2^{(k)}$.

Παράδειγμα: Να βρεθούν με τη μέθοδο Newton οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 - z + 1 = 0$

Έστω $z = x + iy \Rightarrow x^2 - y^2 + 2xyi - x - iy + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 - x + 1 + iy(2x - 1) = 0 \Rightarrow$
$x = 0.5$ και $y = \pm 0.866025$

Αριθμητική λύση με μέθοδο Newton: επιλύεται το σύστημα
$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - x + 1 &= 0 \\ 2xy - y &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x - 1 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -2y \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 2y \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2x - 1$$

Το σύστημα που επιλύεται σε κάθε επανάληψη είναι

$$\begin{bmatrix} 2x - 1 & -2y \\ 2y & 2x - 1 \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \sigma_1^{(k)} \\ \sigma_2^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 - y^2 - x + 1 \\ 2xy - y \end{bmatrix}^{(k)} \Rightarrow x^{(k+1)} = x^{(k)} - \sigma_1^{(k)},\ y^{(k+1)} = y^{(k)} - \sigma_2^{(k)}$$

Πίνακας αποτελεσμάτων

k	x	y	f1	f2	df1dx	df1dy	df2dx	df2dy	dx	dy	err1	err2
1	1	1	0	1	1	-2	2	1	0.4	0.2	100	15.5
2	0.6	0.8	0.12	0.16	0.2	-1.6	1.6	0.2	0.107	-0.06153	20	7.6
3	0.492	0.861	0.00781	-0.013	-0.015	-1.723	1.723	-0.0154	-0.00773	-0.00446	1.6	0.6
4	0.500	0.866	$3.99\text{x}10^{-5}$	$6.9\text{x}10^{-5}$	$7.97\text{x}10^{-5}$	-1.732	1.732	$7.97\text{x}10^{-5}$	0.0000398	0.000023	0.000	0.000

Επομένως $z = 0.5 + 0.866i$. Βρείτε τη συζυγή ρίζα.

Η μέθοδος Newton χρησιμοποιείται στην εύρεση μιγαδικών ριζών.

Επέκταση σε σύστημα n **εξισώσεων**:

$$
\begin{aligned}
& f_1\left(x_1^{(k)}-\sigma_1^{(k)}, x_2^{(k)}-\sigma_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}-\sigma_n^{(k)}\right)=0 \\
& f_2\left(x_1^{(k)}-\sigma_1^{(k)}, x_2^{(k)}-\sigma_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}-\sigma_n^{(k)}\right)=0 \\
& \ldots \\
& f_n\left(x_1^{(k)}-\sigma_1^{(k)}, x_2^{(k)}-\sigma_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}-\sigma_n^{(k)}\right)=0
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
& f_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right)-\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^{(k)} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right|_{x_i^{(n)}}=0 \\
& f_2\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right)-\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^{(k)} \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_i}\right|_{x_i^{(n)}}=0 \\
& \ldots \\
& f_n\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right)-\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^{(k)} \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_i}\right|_{x_i^{(n)}}=0
\end{aligned}
$$

Το γραμμικό σύστημα που επιλύεται σε κάθε επανάληψη είναι

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^{(k)} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right|_{x_i^{(n)}} = f_1^{(k)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^{(k)} \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_i}\right|_{x_i^{(n)}} = f_2^{(k)}$$

$$\ldots$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^{(k)} \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_i}\right|_{x_i^{(n)}} = f_n^{(k)}$$

και στη συνέχεια $x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \sigma_i^{(k)}, \quad i = 1,\ldots,n.$

Το υπολογιστικό φορτίο ανά επανάληψη είναι μεγάλο σε σχέση με άλλες μεθόδους αλλά συνήθως η μέθοδος Newton συγκλίνει σε μικρό αριθμό επαναλήψεων.

Εναλλακτική (**κλειστή**) μορφή αλγορίθμου Newton για σύστημα n εξισώσεων:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \sigma_i^{(k)} = x_i^{(k)} - \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{i-1}} & f_1 & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{i+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & & & & \\ \dfrac{\partial f_{i-1}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_{i-1}}{\partial x_{i-1}} & f_{i-1} & \dfrac{\partial f_{i-1}}{\partial x_{i+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_{i-1}}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_{i-1}} & f_i & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_{i+1}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_{i+1}}{\partial x_{i-1}} & f_{i+1} & \dfrac{\partial f_{i+1}}{\partial x_{i+1}} & & \dfrac{\partial f_{i+1}}{\partial x_n} \\ \vdots & & & & & & \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_{i-1}} & f_n & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_{i+1}} & & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}}{J\left(f_1, \ldots, f_n\right)}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Ασκήσεις:

1. Επιλύστε με μία απευθείας μέθοδο διατηρώντας τρία σημαντικά ψηφία σε όλους τους υπολογισμούς το γραμμικό σύστημα

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 46 & -16 \\ 19 & -13 & 23 \\ 31 & 26 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.3 \\ 14 \\ 17 \end{pmatrix}$$

   Αιτιολογήστε την επιλογή της μεθόδου και επαληθεύστε ότι η λύση που προκύπτει ικανοποιεί το γραμμικό σύστημα.

2. Α) Έστω ότι για την εύρεση της ρίζας της εξίσωσης $f(x)=0$ εφαρμόζεται ο επαναληπτικός αλγόριθμος $x^{(n+1)} = \omega F\left(x^{(n)}\right) + (1-\omega)x^{(n)}$ όπου ω ένας πραγματικός αριθμός. Να υπολογιστεί η τιμή του ω που να βελτιστοποιεί το ρυθμό σύγκλισης της επαναληπτικής διαδικασίας.

   Β) Δίδεται ό πίνακας $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

   Υπολογίστε τη φασματική ακτίνα $\rho(G_J)$ του πίνακα επανάληψης της μεθόδου Jacobi για γραμμικά αλγεβρικά συστήματα με πίνακα συντελεστών τον πίνακα $\boldsymbol{A}$.

   Γ) Υπολογίστε τον αριθμό προσθέσεων/αφαιρέσεων, πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων ανά επανάληψη της μεθόδου Jacobi.

3. Δίδεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2.1 & c \\ c & 2.1 \end{pmatrix}$, όπου c αυθαίρετος πραγματικός αριθμός. Να βρεθεί το εύρος των τιμών του c, για το οποίο οι μέθοδοι Jacobi και Gauss Seidel συγκλίνουν όταν εφαρμοστούν στην επίλυση του συστήματος $Ax = b$.

4. Με αρχική εκτίμηση $\boldsymbol{x}^{(0)} = (1,1,1)^T$ εφαρμόστε μία επανάληψη του αλγορίθμου Newton για τον υπολογισμό μιας λύσης $\boldsymbol{x}^{(1)}$ του συστήματος εξισώσεων:
$14x_1 + x_2^2 - 3x_3 = 13$
$x_1^2 + 9x_2 - x_3 = 10$
$x_2^3 - 24x_3 = -22$
Κατά την διαδικασία υπολογισμού η επίλυση του προκύπτοντος γραμμικού συστήματος να γίνει με απευθείας μέθοδο (όχι επαναληπτική).

5. Για την επίλυση του γραμμικού αλγεβρικού συστήματος $Ax = b$ προτείνεται ο επαναληπτικός αλγόριθμος:

$$x_i^{(n+1)} = (1-\omega)x_i^{(n)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} a_{ij}x_j^{(n)}\right], \quad i = 1,2,\ldots,N,$$

όπου a_{ij} και b_i τα στοιχεία του πίνακα A και του διανύσματος b αντίστοιχα, N ο αριθμός των εξισώσεων του συστήματος, ω η παράμετρος χαλάρωσης και (n) ο δείκτης επανάληψης.
Α) Διατυπώστε τη γενική μορφή του πίνακα επανάληψης G του αλγορίθμου.
Β) Συγκρίνετε τον προτεινόμενο επαναληπτικό αλγόριθμο με τις μεθόδους Jacobi και Gauss Seidel (σχολιασμός).
Γ) Προγραμματίστε τον αλγόριθμο.
Δ) Εφαρμόστε τον αλγόριθμο κάνοντας 2 επαναλήψεις με $\omega = 1.2$ στο σύστημα:

$$\begin{aligned} -3x_2 + 7x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 5x_1 - 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

6. Να βρεθεί τουλάχιστον μια ρίζα (εκτός του μηδενός) της εξίσωσης $\tan(\omega) = -\omega$ α) με τη μέθοδο της διχοτόμου και β) με τη μέθοδο Newton.

7. Να επιλυθεί το σύστημα $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 0 \\ 2000 \end{pmatrix}$ με αλγόριθμο Thomas.

   Επίσης, να γίνουν 2 επαναλήψεις του επαναληπτικού σχήματος Jacobi με αρχική εκτίμηση $u_1^{(0)} = u_2^{(0)} = u_3^{(0)} = 0$ και να υπολογιστεί η φασματική ακτίνα του G_J.

8. Δίδεται το σύστημα $Ax = b$ όπου ο πίνακας είναι συμμετρικός ($A = A^T$) και κυρίαρχα διαγώνιος ($a_{ii} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \left| a_{ij} \right|, \ i = 1,...,N$). Προτείνετε την βέλτιστη μέθοδο επίλυσης του συστήματος και αιτιολογείστε την απάντησή σας.

   Να γίνουν δύο επαναλήψεις της μεθόδου Newton για την επίλυση του συστήματος: $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1.9 \\ x_1^2 + x_2^2 &= 4.2 \end{aligned}$

   Αρχική εκτίμηση $x_1^{(0)} = 2$, $x_2^{(0)} = 0$. Διατυπώστε εν συντομία τα κύρια πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της μεθόδου Newton.

9. Επιλύστε το εξής σύστημα εξισώσεων: $\begin{aligned} 0.002321x_1 + 0.090244x_2 &= 0.047443 \\ 0.304300x_1 + 11.556000x_2 &= 6.082300 \end{aligned}$

   χρησιμοποιώντας απαλοιφή Gauss με μερική οδήγηση. Δείξτε καθαρά όλα τα βήματα με ακρίβεια 5 σημαντικών ψηφίων.

10. Θεωρείστε την εξίσωση $x^2 - 6x + 5 = 0$. Προτείνετε έναν επαναληπτικό αριθμητικό αλγόριθμο εύρεσης μίας εκ των ριζών που εξετάστε την σύγκλιση του σχήματος για οποιαδήποτε αρχική τιμή.

11. Για ένα γενικό 2x2 πίνακα $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ βρείτε τους πίνακες επανάληψης G_J και G_{GS} των μεθόδων Jacobi και Gauss-Seidel αντίστοιχα. Επίσης βρείτε τις ιδιοτιμές και εξετάστε τυχόν αλληλοεξάρτησή τους.

12. Να επιλυθεί το μη γραμμικό σύστημα: $\begin{matrix} f_1(x_1,x_2)=x_1+x_2-2=0 \\ f_2(x_1,x_2)=x_1^3+x_2^3-8=0 \end{matrix}$

13. Για τον αριθμητικό υπολογισμό της ρίζας της εξίσωσης $x^3=3$ προτείνεται ο επαναληπτικός αλγόριθμος: $x^{(n+1)}=\dfrac{2}{3}x^{(n)}+\dfrac{1}{\left(x^{(n)}\right)^2}$ Να εξεταστεί εάν ο προτεινόμενος επαναληπτικός αλγόριθμος θα συγκλίνει στην αναλυτική ρίζα $x=3^{1/3}$. Εάν συγκλίνει δώστε την τάξη σύγκλισης και τυχόν περιοριστικές συνθήκες στην αρχική εκτίμηση $x^{(0)}$.

14. Να λυθεί το σύστημα $\begin{matrix} x^2+xy=10 \\ y+3xy^2=57 \end{matrix}$ με τη μέθοδο Newton-Raphson με αρχικές τιμές $x_0=1.5$ και $y_o=3.5$. Να προσδιορισθεί αριθμητικά ο ρυθμός σύγκλισης.

15. Θεωρήστε την δευτεροβάθμια εξίσωση $x^2-2ax+\beta=0$, όπου *α, β>0* και $a^2 >> \beta$. Δώστε έναν ευσταθή αλγόριθμο για τον υπολογισμό των ριζών.

16. Να αποδειχθεί για σύστημα 2 μη-γραμμικών εξισώσεων ότι η μέθοδος Newton είναι 2ης τάξης, δηλαδή ότι το σφάλμα στην $n+1$ επανάληψη είναι ανάλογο του τετραγώνου του σφάλματος στην n επανάληψη.

$$\begin{array}{l} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} x^{(n+1)}=x^{(n)}-\dfrac{fg_y-gf_y}{J(f,g)} \\ y^{(n+1)}=y^{(n)}-\dfrac{gf_x-fg_x}{J(f,g)} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} x+\sigma_1^{(n+1)}=x+\sigma_1^{(n)}-\dfrac{fg_y-gf_y}{J(f,g)} \\ y+\sigma_2^{(n+1)}=y+\sigma_2^{(n)}-\dfrac{gf_x-fg_x}{J(f,g)} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \sigma_1^{(n+1)}=\dfrac{\sigma_1^{(n)}J-fg_y+gf_y}{J} \\ \sigma_2^{(n+1)}=\dfrac{\sigma_2^{(n)}J-gf_x+fg_x}{J} \end{array}$$

$$f(x,y)=f\left(x^{(n)}-\sigma_1^{(n)},y^{(n)}-\sigma_2^{(n)}\right)=f\left(x^{(n)},y^{(n)}\right)-\sigma_1^{(n)}f_x-\sigma_2^{(n)}f_y+\frac{1}{2}\left[\sigma_1^{(n)}\right]^2 f_{xx}+\sigma_1^{(n)}\sigma_2^{(n)}f_{xy}+\frac{1}{2}\left[\sigma_2^{(n)}\right]^2 f_{yy}=0$$
$$g(x,y)=g\left(x^{(n)}-\sigma_1^{(n)},y^{(n)}-\sigma_2^{(n)}\right)=g\left(x^{(n)},y^{(n)}\right)-\sigma_1^{(n)}g_x-\sigma_2^{(n)}g_y+\frac{1}{2}\left[\sigma_1^{(n)}\right]^2 g_{xx}+\sigma_1^{(n)}\sigma_2^{(n)}g_{xy}+\frac{1}{2}\left[\sigma_2^{(n)}\right]^2 g_{yy}=0$$

Πολλαπλασιάζεται η 1η πρώτη εξίσωση με $-g_y$ και η 2η εξίσωση με f_y και οι προκύπτουσες εξισώσεις προστίθενται:

$$-fg_y+gf_y+\sigma_1^{(n)}J+O\left(\left[\sigma_1^{(n)}\right]^2\right)+O\left(\sigma_1^{(n)}\sigma_2^{(n)}\right)+O\left(\left[\sigma_2^{(n)}\right]^2\right)=0 \rightarrow \sigma_1^{(n)}J-fg_y+gf_y=O\left(\left[\sigma_1^{(n)}\right]^2\right)+O\left(\sigma_1^{(n)}\sigma_2^{(n)}\right)+O\left(\left[\sigma_2^{(n)}\right]^2\right)$$

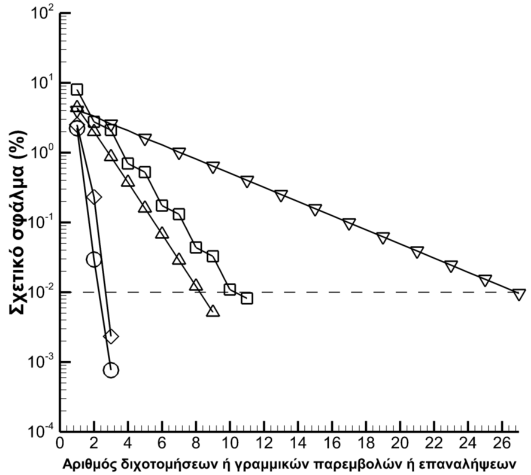
Η δεξιά πλευρά της εξίσωσης αντικαθίσταται στην σχέση εξέλιξης του σφάλματος και προκύπτει: $\sigma_1^{(n+1)}\sim O\left(\left[\sigma_1^{(n)}\right]^2\right)+O\left(\sigma_1^{(n)}\sigma_2^{(n)}\right)+O\left(\left[\sigma_2^{(n)}\right]^2\right)$

Πολλαπλασιάζοντας η 1η πρώτη εξίσωση με g_x και η 2η εξίσωση με $-f_x$ και προσθέτοντας τις προκύπτουσες προκύπτει:

$$\sigma_2^{(n+1)}\sim O\left(\left[\sigma_1^{(n)}\right]^2\right)+O\left(\sigma_1^{(n)}\sigma_2^{(n)}\right)+O\left(\left[\sigma_2^{(n)}\right]^2\right)$$

Η μεθοδολογία αυτή γενικεύεται για σύστημα πολλών μη γραμμικών εξισώσεων.

17. Έστω ότι η ρίζα της εξίσωσης $f\left(x\right)=0$ προκύπτει με τις μεθόδους: A) διχοτόμησης, B) γραμμικής παρεμβολής, Γ) απλών επαναλήψεων, Δ) απλών επαναλήψεων με χαλάρωση και E) Newton. Ο ρυθμός σύγκλισης της κάθε μεθόδου απεικονίζεται στο παράπλευρο σχήμα όπου φαίνεται το σχετικό σφάλμα ως προς τον αριθμό διχοτομήσεων, γραμμικών παρεμβολών και επαναλήψεων χωρίς ωστόσο να αναφέρεται η αντίστοιχη μέθοδος. Με βάση τις γνώσεις σας σημειώστε τη μέθοδο που αντιστοιχεί σε κάθε ρυθμός σύγκλισης και εξηγήστε το λόγο.



18. Να λυθεί με απαλοιφή Gauss πλήρους οδήγησης το παρακάτω σύστημα χρησιμοποιώντας 2, 3 και 4 σημαντικά ψηφία. Σχολιάστε τα αποτελέσματα.

<u>Δύο</u> σημαντικά ψηφία:

$$\begin{matrix} 2x_1+1000x_2=1000 \\ x_1+x_2=2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1000x_2+2x_1=1000 \\ x_2+x_1=2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x_2+0.002x_1=1 \\ x_2+x_1=2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x_2+0.002x_1=1 \\ 0.998x_1=1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x_2=1-0.002x_1 \\ 1.0x_1=1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x_2=1-0.002=0.998=1.0 \\ x_1=1.0 \end{matrix} \quad \text{Υπόλοιπο} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>Τρία</u> σημαντικά ψηφία: $x_1=\dfrac{1}{0.998}=1.002.....=1.00$, $x_2=1-0.002=0.998$ Υπόλοιπο $\begin{bmatrix} 0 \\ -0.002 \end{bmatrix}$

<u>Τέσσερα</u> σημαντικά ψηφία: $x_1=\dfrac{1}{0.998}=1.002.....=1.002$, $x_2=1-0.002\times1.002=1.000-0.002004=0.997996=0.9980$ Υπόλοιπο $\begin{bmatrix} 0.004 \\ 0 \end{bmatrix}$

19. Σχολιάστε την σύγκλιση του αλγορίθμου $x^{(k+1)} = \left(I - \frac{1}{6}A\right)x^{(k)} + \frac{1}{6}b, \quad k = 0,1,2,\ldots,$ όταν $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ και $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Ο πίνακας επανάληψης είναι $G = I - \frac{1}{6}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$. Οι ιδιοτιμές του πίνακα επανάληψης βρίσκονται ως εξής:

$$\det\left[G - \lambda I\right] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{6} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{23}{36} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3}{4} \pm i\frac{\sqrt{11}}{12}.$$

Το μέτρο των ιδιοτιμών είναι $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 0.799$ και η φασματική ακτίνα του πίνακα επανάληψης είναι $\rho(G) = 0.799 < 1$ άρα η μέθοδος συγκλίνει.

20. Έστω το μη γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} x^2 + y &= 37 \\ x - y^2 &= 5 \\ x + y + z &= 3 \end{aligned}$$

Εφαρμόστε 1 επανάληψη της μεθόδου Newton με αρχική εκτίμηση: $x = y = z = 0$ (Απάντηση: $x^{(1)} = 5$, $y^{(1)} = 37$, $z^{(1)} = -39$)

21. Εξετάστε την εφαρμογή της μεθόδου Newton στη επίλυση του γραμμικού συστήματος n εξισώσεων με n αγνώστους της μορφής $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.