ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ

Τομέας Οργάνωσης Παραγωγής & Βιομηχανικής Διοίκησης

Σημειώσεις του μαθήματος:

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΠΡΟΤΥΠΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Γιώργος Λυμπερόπουλος
Αναπληρωτής Καθηγητής Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Βόλος, 2007

Περιεχόμενα

1. Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Τα προβλήματα που θα μας απασχολήσουν σε αυτό το κεφάλαιο αφορούν στην λήψη αποφάσεων κάτω από μεταβλητότητα η οποία προέρχεται από πηγές που δεν μπορούμε να ελέγξουμε (τυχαιότητα). Αντί να αντιμετωπίσουμε αυτή τη μεταβλητότητα ποιοτικά μπορούμε να την ενσωματώσουμε σε ένα *στοχαστικό* (πιθανολογικό) μαθηματικό πρότυπο και να την αντιμετωπίσουμε ποσοτικά. Το μαθηματικό αυτό πρότυπο βασίζεται στις λεγόμενες στοχαστικές διαδικασίες.

Μία *στοχαστική διαδικασία* είναι μια αριθμημένη συλλογή τυχαίων μεταβλητών $\{X_t\}$ όπου ο δείκτης t διατρέχει ένα δεδομένο σύνολο T. Συχνά το T είναι το σύνολο των μη αρνητικών ακέραιων αριθμών και το X_t αναπαριστάνει ένα μετρήσιμο χαρακτηριστικό στον χρόνο t. Για παράδειγμα, η στοχαστική διαδικασία X_1, X_2, X_3, … μπορεί να αναπαριστάνει τη συλλογή των εβδομαδιαίων (μηνιαίων) επιπέδων αποθεμάτων για κάποιο προϊόν ή την συλλογή των εβδομαδιαίων (μηνιαίων) ζητήσεων γι' αυτό το προϊόν.

Ιδιαίτερου ενδιαφέροντος γι' αυτό το μάθημα είναι οι στοχαστικές διαδικασίες με την εξής δομή: Σε διαφορετικά σημεία του χρόνου t που προσδιορίζονται με 0, 1, 2, … το σύστημα βρίσκεται σε ακριβώς μια από ένα πεπερασμένο αριθμό αμοιβαία αποκλειστικών και εξαντλητικών καταστάσεων που προσδιορίζονται με 0, 1, 2, …, M. Τα σημεία του χρόνου μπορεί να είναι κατανεμημένα σε ίσα διαστήματα ή τα διαδοχικά διαστήματά τους μπορεί να εξαρτώνται από την συνολική συμπεριφορά του φυσικού συστήματος στο οποίο η στοχαστική διαδικασία είναι εμπεδωμένη, π.χ. μπορεί να εξαρτώνται από το χρόνο ανάμεσα σε περιστάσεις κάποιου φαινομένου (π.χ. άφιξη μιας ζήτησης).

Παράδειγμα: Πρότυπο Αποθεμάτων

Σαν πρώτο παράδειγμα, έστω ένα μαγαζί φωτογραφικών ειδών που εμπορεύεται ένα συγκεκριμένο μοντέλο φωτογραφικής μηχανής το οποίο μπορεί να παραγγελθεί εβδομαδιαία. Έστω D_1, D_2, … η ζήτηση για την φωτογραφική μηχανή την 1η, 2η, … εβδομάδα. Τα D_i είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με την ίδια γνωστή κατανομή. Έστω X_0, X_1, X_2, … ο αριθμός των φωτογραφικών μηχανών αρχικά, και στο τέλος της 1ης, 2ης, … εβδομάδας.

Στο τέλος της εβδομάδας και αφού κλείσει για τους πελάτες, το μαγαζί παραγγέλνει έναν αριθμό φωτογραφικών μηχανών που υποθέτουμε ότι παραλαμβάνεται από το μαγαζί λίγο πριν ξανανοίξει στην αρχή της επόμενης εβδομάδας. Έστω O_1, O_2, … η ποσότητα παραγγελίας (αριθμός φωτογραφικών μηχανών) στο τέλος της 1ης, 2ης, … εβδομάδας. Το μαγαζί χρησιμοποιεί την εξής πολιτική παραγγελίας. Αν ο αριθμός των φωτογραφικών μηχανών είναι μικρότερος από ένα κατώτατο κατώφλι, s, στο τέλος της εβδομάδας, το μαγαζί παραγγέλνει μέχρις ένα ανώτατο κατώφλι, S, φωτογραφικές μηχανές (δηλαδή παραγγέλνει όσες μηχανές χρειάζονται για να συμπληρωθούν S φωτογραφικές μηχανές), όπου $S \geq s$. Αλλιώς το μαγαζί δεν παραγγέλνει καθόλου. Υποθέτουμε ότι όταν η ζήτηση ξεπερνάει το απόθεμα, οι πωλήσεις χάνονται. Σύμφωνα με την παραπάνω πολιτική παραγγελίας (s, S), η ποσότητα παραγγελίας στο τέλος της εβδομάδας t, δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$O_t = \begin{cases} S - X_t, & \text{αν } X_t < s, \\ 0, & \text{αν } X_t \geq s. \end{cases}$$

Με αυτά τα δεδομένα, το $\{X_t\}$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ είναι μια στοχαστική διαδικασία με πιθανές καταστάσεις 0, 1, …, S. Τα X_t είναι καθαρά εξαρτημένα μεταξύ τους και μπορούν να υπολογισθούν επαναληπτικά από την παρακάτω σχέση:

$$X_{t+1} = \max\left\{X_t + O_t - D_{t+1}, 0\right\} .$$

Αντικαθιστώντας το O_t από την πιο πάνω σχέση, έχουμε:

$$X_{t+1} = \begin{cases} \max\{(S - D_{t+1}), 0\}, & \text{αν } X_t < s, \\ \max\{(X_t - D_{t+1}), 0\}, & \text{αν } X_t \geq s. \end{cases}$$

Τέλος, αν υποθέσουμε ότι $s = 1$ και $S = 3$, τότε, η παραπάνω σχέση παίρνει τη μορφή:

$$X_{t+1} = \begin{cases} \max\{(3 - D_{t+1}), 0\}, & \text{αν } X_t < 1, \\ \max\{(X_t - D_{t+1}), 0\}, & \text{αν } X_t \geq 1. \end{cases}$$

1.1 Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Για να μπορούμε να πάρουμε αναλυτικά αποτελέσματα χρειάζεται να κάνουμε κάποιες υποθέσεις σχετικά με την κοινή κατανομή των X_0, X_1, X_2, … Μια υπόθεση που διευκολύνει την εξεύρεση αναλυτικής λύσης είναι ότι η στοχαστική διαδικασία είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα που έχει την λεγόμενη Μαρκοβιανή ιδιότητα.

Μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}$ έχει την *Μαρκοβιανή ιδιότητα* αν:

$$P\{X_{t+1} = j | X_0 = k_0, X_1 = k_1, \ldots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = i\} = P\{X_{t+1} = j | X_t = i\},$$

για $t = 0, 1, 2, \ldots$ και κάθε αλληλουχία $i, j, k_0, k_1, \ldots, k_{t-1}$.

Δηλαδή, η δεσμευμένη πιθανότητα κάθε μελλοντικής *περίστασης* της διαδικασίας, δεδομένης οποιασδήποτε περασμένης περίστασης και της παρούσας κατάστασης $X_t = i$, είναι ανεξάρτητη από την περασμένη περίσταση και εξαρτάται μόνο από την παρούσα κατάσταση της διαδικασίας.

Οι δεσμευμένες πιθανότητες $P\{X_{t+1} = j \mid X_t = i\}$ ονομάζονται *πιθανότητες μετάβασης*. Εάν για κάθε i και j, $P\{X_{t+1} = j \mid X_t = i\} = P\{X_1 = j \mid X_0 = i\}$, για όλα τα $t = 0, 1, 2, \ldots$, τότε οι πιθανότητες μετάβασης (ενός βήματος) λέμε ότι είναι στάσιμες και συμβολίζονται με p_{ij}. Όταν λέμε *στάσιμες πιθανότητες μετάβασης* εννοούμε ότι οι πιθανότητες μετάβασης δεν αλλάζουν με το χρόνο. Γενικότερα, στάσιμες πιθανότητες μετάβασης έχουμε όταν για κάθε i, j και n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) ισχύει:

$$P\{X_{t+n} = j | X_t = i\} = P\{X_n = j | X_0 = i\} \text{ για όλα τα } t = 0, 1, 2, \ldots$$

Οι παραπάνω πιθανότητες μετάβασης συνήθως συμβολίζονται με $p_{ij}^{(n)}$ και ονομάζονται πιθανότητες μετάβασης n βημάτων. Ειδικότερα σημειώνουμε ότι:

$$p_{ij}^{(0)} = P\{X_0 = j | X_0 = i\} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j, \\ 0, & \text{αν } i \neq j, \end{cases} \text{ για } n = 0,$$

$$p_{ij}^{(1)} = p_{ij}, \text{ για } n = 1.$$

Εφόσον τα $p_{ij}^{(n)}$ είναι πιθανότητες, πρέπει να ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες:

$$p_{ij}^{(n)} \geq 0, \text{ για όλα τα } i \text{ και } j \text{ και } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\sum_{j=0}^{M} p_{ij}^{(n)} = 1, \text{ για όλα τα } i \text{ και } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ένας βολικός τρόπος αναπαράστασης των πιθανοτήτων μετάβασης είναι με την μορφή πίνακα:

$$\mathbf{P}^{(n)} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{Κατάσταση} & 0 \quad \cdots \quad M \\ \hline 0 & p_{00}^{(n)} \cdots p_{0M}^{(n)} \\ \vdots & \vdots \\ M & p_{M0}^{(n)} \cdots p_{MM}^{(n)} \\ \hline \end{array} \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

ή ισοδύναμα:

$$\mathbf{P}^{(n)} = \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & \cdots & p_{0M}^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{M0}^{(n)} & \cdots & p_{MM}^{(n)} \end{bmatrix}.$$

Έχοντας υπόψη τα παραπάνω μπορούμε να δώσουμε τον παρακάτω ορισμό της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}$ (t = 0, 1, …) λέμε ότι είναι μια *Μαρκοβιανή αλυσίδα με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων* αν έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Έναν πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων.
2. Την Μαρκοβιανή ιδιότητα.
3. Στάσιμες πιθανότητες μετάβασης.
4. Ένα σύνολο αρχικών πιθανοτήτων $P\{X_0 = i\}$, για όλα τα i.

Επιστρέφοντας στο παράδειγμα των αποθεμάτων φωτογραφικών μηχανών με s = 1 και S = 3, μπορούμε να δούμε ότι το $\{X_t\}$, όπου X_t είναι ο αριθμός των φωτογραφικών μηχανών σε απόθεμα στο τέλος της εβδομάδας t, είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πιθανές καταστάσεις 0, 1, 2, 3. Τα στοιχεία του *πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης* (ενός βήματος),

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix},$$

μπορούν να υπολογιστούν ως εξής.

Για να υπολογισθεί το p_{00} πρέπει να υπολογισθεί η πιθανότητα $P\{X_t = 0 | X_{t-1} = 0\}$. Αυτό γίνεται ως εξής. Αν $X_{t-1} = 0$, τότε $X_t = \max\{(3 - D_t), 0\}$. Δηλαδή αν $X_t = 0$, τότε πρέπει η ζήτηση D_t να είναι 3 ή περισσότερο. Συνεπώς, $p_{00} = P\{D_t \geq 3\}$. Ας υποθέσουμε ότι η ζήτηση D_t έχει κατανομή Poisson με παράμετρο λ = 1, δηλαδή $P\{D_t = n\} = e^{-\lambda}\lambda^n / n!$ $= e^{-1}/n! = 0{,}368/n!$, n = 0, 1, 2, … Τότε, το p_{00} είναι η πιθανότητα μια τυχαία μεταβλητή με κατανομή Poisson με παράμετρο λ = 1 να πάρει την τιμή 3 ή περισσότερο και ισούται με:

$$p_{00} = P\{D_t \geq 3\} = 1 - P\{D_t < 3\} = 1 - \sum_{k=0}^{2} P\{D_t = k\} = 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{e^{-1}}{k!} = 0{,}080.$$

Παρόμοια, $p_{10} = P\{X_t = 0 | X_{t-1} = 1\}$ που υπολογίζεται ως εξής. Αν X_{t-1} = 1, τότε $X_t = \max\{(1 - D_t), 0\}$. Δηλαδή αν X_t = 0, τότε πρέπει η ζήτηση να είναι 1 ή παραπάνω. Συνεπώς,

$$p_{10} = P\{Dt \geq 1\} = 1 - P\{D_t < 1\} = 1 - P\{D_t = 0\} = 1 - \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = 0{,}632.$$

Παρόμοια, $p_{21} = P\{X_t = 1 | X_{t-1} = 2\}$ που υπολογίζεται ως εξής. Αν X_{t-1} = 2, τότε $X_t = \max\{(2 - D_t), 0\}$. Δηλαδή αν X_t = 1, τότε πρέπει η ζήτηση D_t να είναι ακριβώς 1. Συνεπώς,

$$p_{21} = P\{D_t = 1\} = \frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!} = 0{,}368\,.$$

Τα υπόλοιπα στοιχεία υπολογίζονται με παρόμοιο τρόπο. Έτσι, έχουμε τελικά:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0{,}080 & 0{,}184 & 0{,}368 & 0{,}368 \\ 0{,}632 & 0{,}368 & 0 & 0 \\ 0{,}264 & 0{,}368 & 0{,}368 & 0 \\ 0{,}080 & 0{,}184 & 0{,}368 & 0{,}368 \end{bmatrix}.$$

Στην συνέχεια, παραθέτουμε τρία ακόμα παραδείγματα.

Παράδειγμα: Πρότυπο της Τιμής μιας Μετοχής

Στο τέλος της ημέρας καταγράφεται η τιμή μιας μετοχής. Αν η τιμή έχει ανέβει, η πιθανότητα να ανέβει αύριο είναι 0,7. Αν η τιμή έχει κατέβει, η πιθανότητα να ανέβει αύριο είναι μόνο 0,5.

Το παραπάνω πρότυπο είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα όπου η κατάσταση 0 αναπαριστάνει την άνοδο της μετοχής και η κατάσταση 1 αναπαριστάνει την κάθοδο της μετοχής. Ο πίνακας μετάβασης είναι:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα: Επέκταση Προτύπου της Τιμής μιας Μετοχής

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, στο τέλος της ημέρας καταγράφεται η τιμή μιας μετοχής. Έστω ότι η αύξηση ή μείωση της τιμής της μετοχής αύριο εξαρτάται από το αν αυξήθηκε ή μειώθηκε σήμερα *και* χθες. Συγκεκριμένα:

Αν η τιμή αυξήθηκε χτες και σήμερα, θα αυξηθεί αύριο με πιθανότητα 0,9.
Αν η τιμή μειώθηκε χτες και αυξήθηκε σήμερα, θα αυξηθεί αύριο με πιθανότητα 0,6.
Αν η τιμή αυξήθηκε χτες και μειώθηκε σήμερα, θα αυξηθεί αύριο με πιθανότητα 0,5.
Αν η τιμή μειώθηκε χτες και σήμερα, θα αυξηθεί αύριο με πιθανότητα 0,3.

Αν η κατάσταση του συστήματος είναι η αύξηση της τιμής της μετοχής σε μια μέρα, το σύστημα δεν είναι πια μια Μαρκοβιανή αλυσίδα γιατί δεν έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα. Μπορούμε όμως να το μετατρέψουμε σε Μαρκοβιανή αλυσίδα ορίζοντας τις καταστάσεις ως εξής:

Κατάσταση	Περιγραφή
0	Η μετοχή αυξήθηκε χτες και σήμερα.
1	Η μετοχή μειώθηκε χτες και αυξήθηκε σήμερα.
2	Η μετοχή αυξήθηκε χτες και μειώθηκε σήμερα.
3	Η μετοχή μειώθηκε χτες και σήμερα.

Τώρα το σύστημα είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με 4 καταστάσεις και τον παρακάτω πίνακα μετάβασης:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}3 & 0 & 0{,}7 \end{bmatrix}.$$

Για παράδειγμα, η σειρά 2 αντιστοιχεί στην κατάσταση 1 που σημαίνει ότι η μετοχή μειώθηκε χτες αλλά αυξήθηκε σήμερα. Πιο συγκεκριμένα, το $1^{ο}$ στοιχείο της σειράς 2 είναι η πιθανότητα η μετοχή να ανέβει αύριο όταν έχει ανέβει σήμερα, δεδομένου ότι η μετοχή ανέβηκε σήμερα αλλά έπεσε χτες , δηλαδή 0,6. Το 3ο στοιχείο είναι η πιθανότητα η μετοχή να πέσει αύριο όταν έχει ανέβει σήμερα, δεδομένου ότι η μετοχή ανέβηκε σήμερα αλλά έπεσε χτες, δηλαδή 0,4. Τα άλλα δύο στοιχεία είναι 0 γιατί αφορούν περιστάσεις που είναι αντιφατικές, συγκεκριμένα αφορούν περιστάσεις όπου η μετοχή έχει ανέβει σήμερα, δεδομένου ότι έπεσε σήμερα.

Το παραπάνω παράδειγμα δείχνει ότι οι Μαρκοβιανές αλυσίδες μπορούν να ενσωματώσουν οποιεσδήποτε πληροφορίες παρελθόντων χρόνων, όμως το κόστος είναι η σημαντική αύξηση του αριθμού των καταστάσεων του συστήματος. Δηλαδή, για να ενσωματωθούν N ιστορικές περίοδοι απαιτούνται N^n καταστάσεις για να μοντελοποιηθεί αυτή η εξάρτηση ως Μαρκοβιανή αλυσίδα.

Παράδειγμα: Πρότυπο ενός Τυχερού Παιχνιδιού

Έστω ότι ένας παίχτης ξεκινάει έχοντας 1 χιλιάρικο και παίζει ένα τυχερό παιχνίδι αλλεπάλληλες φορές. Κάθε φορά που παίζει το παιχνίδι, κερδίζει 1 χιλιάρικο με πιθανότητα p και χάνει 1 χιλιάρικο με πιθανότητα $1 - p$. Το παιχνίδι τελειώνει όταν ο παίκτης κερδίσει 3 χιλιάρικα ή χάσει όλα του τα χρήματα.

Αυτό το πρότυπο είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με τις καταστάσεις που αντιστοιχούν στην περιουσία του παίχτη δηλαδή 0, 1, 2, 3 χιλιάρικα, και τον παρακάτω πίνακα μετάβασης:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.2 Εξισώσεις Chapman - Kolmogorov

Μια μέθοδος υπολογισμού των πιθανοτήτων μετάβασης n βημάτων είναι να χρησιμοποιήσουμε τις λεγόμενες εξισώσεις Chapman – Kolmogorov:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{M} p_{ik}^{(\upsilon)} p_{kj}^{(n-\upsilon)} \text{ για όλα τα } i, j, n \text{ και } 0 \le \upsilon \le n.$$

Το γινόμενο $p_{ik}^{(\upsilon)} p_{kj}^{(n-\upsilon)}$ είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ότι ξεκινώντας από την κατάσταση i, η διαδικασία πηγαίνει στην κατάσταση k μετά από υ βήματα και μετά στην κατάσταση j σε $n - \upsilon$ βήματα. Αθροίζοντας αυτές τις δεσεμευμένες πιθανότητες για όλες τις ενδιάμεσες καταστάσεις k δίνει την πιθανότητα $p_{ij}^{(n)}$. Η ειδική περίπτωση $\upsilon = 1$ και $\upsilon = n - 1$ οδηγεί αντίστοιχα στις εκφράσεις:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{M} p_{ik} p_{kj}^{(n-1)},$$

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{M} p_{ik}^{(n-1)} p_{kj},$$

για όλα τα i, j και n.

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι οι πιθανότητες μετάβασης n βημάτων μπορούν να υπολογιστούν επαναληπτικά από τις πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος. Για $n = 2$ οι υπολογισμοί αυτοί είναι:

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{k=0}^{M} p_{ik} p_{kj}, \text{ για όλα τα } i, j.$$

Τα $p_{ij}^{(2)}$ είναι στοιχεία του πίνακα $\mathbf{P}^{(2)}$. Τα στοιχεία αυτά μπορούν να υπολογιστούν πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα των πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος με τον εαυτό του, δηλαδή:

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^2 .$$

Γενικότερα ο πίνακας των πιθανοτήτων μετάβασης n βημάτων δίνεται από την έκφραση:

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} \cdots \mathbf{P} = \mathbf{P}^n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{n-1} = \mathbf{P}^{n-1} \cdot \mathbf{P} .$$

Επιστρέφοντας στο παράδειγμα των αποθεμάτων, ο πίνακας των πιθανοτήτων μετάβασης 2 βημάτων, είναι ο εξής:

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 0{,}080 & \cdots & 0{,}368 \\ \vdots & & \vdots \\ 0{,}080 & \cdots & 0{,}368 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}080 & \cdots & 0{,}368 \\ \vdots & & \vdots \\ 0{,}080 & \cdots & 0{,}368 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}249 & 0{,}286 & 0{,}300 & 0{,}615 \\ 0{,}283 & 0{,}252 & 0{,}233 & 0{,}233 \\ 0{,}351 & 0{,}319 & 0{,}233 & 0{,}097 \\ 0{,}249 & 0{,}286 & 0{,}300 & 0{,}165 \end{bmatrix}.$$

Ο παραπάνω πίνακας μας λεει ότι δεδομένου ότι υπάρχει 1 φωτογραφική μηχανή στο μαγαζί στο τέλος μιας εβδομάδας, η πιθανότητα ότι δεν θα υπάρχουν φωτογραφικές μηχανές μετά από 2 εβδομάδες είναι $p_{10}^{(2)} = 0{,}283$. Επίσης, δεδομένου ότι υπάρχουν 2 φωτογραφικές μηχανές στο μαγαζί στο τέλος μιας εβδομάδας, η πιθανότητα ότι θα υπάρχουν 3 φωτογραφικές μηχανές μετά από 2 εβδομάδες είναι $p_{23}^{(2)} = 0{,}097$, κοκ.

Σημειώθηκε ότι οι πιθανότητες μετάβασης ενός ή γενικότερα n βημάτων είναι εξ' ορισμού *δεσμευμένες* πιθανότητες ή πιθανότητες *υπό συνθήκη* ή *υπό όρους* $\left(p_{ij}^{(n)} = P\{X_n = j | X_0 = i\}\right)$. Αν επιθυμούμε να γνωρίζουμε την *άνευ όρων* πιθανότητα $P\{X_n = j\}$, πρέπει να καθορίσουμε την κατανομή πιθανότητας της αρχικής κατάστασης του συστήματος. Έστω $Q_{X_0}(i)$ αυτή η κατανομή, όπου

$$Q_{x_0}(i) = P\{X_0 = i\}, \text{ για } i = 0, 1, \ldots, M.$$

Τότε συνεπάγεται ότι:

$$P\{X_n = j\} = Q_{X_0}(0) p_{0j}^{(n)} + Q_{X_0}(1) p_{1j}^{(n)} + \cdots + Q_{X_0}(M) p_{Mj}^{(n)} .$$

Στο παράδειγμα των αποθεμάτων, ας υποθέσουμε ότι αρχικά υπάρχουν 3 μονάδες σε απόθεμα, δηλαδή $X_0 = 3$. Αυτό σημαίνει ότι $Q_{X_0}(3) = 1$ και $Q_{X_0}(0) = Q_{X_0}(1) = Q_{X_0}(2) = 0$. Συνεπώς, (η άνευ όρων) πιθανότητα να υπάρχουν 3 φωτογραφικές μηχανές σε απόθεμα μετά από 2 εβδομάδες αφ' ότου ξεκινήσει το σύστημα είναι:

$$P\{X_2 = 3\} = (1) p_{33}^{(2)} = 0{,}165 .$$

Αν άντ' αυτού είχαμε υποθέσει ότι $Q_{X_0}(i) = \frac{1}{4}$ για $i = 0, 1, 2, 3$, τότε θα είχαμε:

$$P\{X_2 = 3\} = \frac{1}{4}\left(0{,}165\right) + \frac{1}{4}(0{,}233) + \frac{1}{4}(0{,}097) + \frac{1}{4}(0{,}165) = 0{,}165 .$$

Το ότι το αποτέλεσμα είναι το ίδιο και για τις δυο αρχικές κατανομές είναι καθαρά συμπτωματικό.

1.3 Ταξινόμηση των Καταστάσεων μιας Μαρκοβιανής Αλυσίδας

Μια κατάσταση j λέμε ότι είναι *προσβάσιμη* από την κατάσταση i, αν $p_{ij}^{(n)} > 0$ για κάποιο $n \geq 0$.

Στο παράδειγμα των αποθεμάτων, $p_{ij}^{(2)} > 0$ για όλα τα i, j, έτσι κάθε κατάσταση είναι προσβάσιμη από κάθε άλλη κατάσταση.

Στο παράδειγμα με τον τζόγο η κατάσταση 2 δεν είναι προσβάσιμη από την κατάσταση 3 (μόλις ο παίκτης φτάσει στην κατάσταση 3 δεν φεύγει ποτέ από αυτή την κατάσταση). Αυτό φαίνεται και από τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης n βημάτων, $\mathbf{P}^{(n)}$,

$$\mathbf{P}^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ για όλα τα } n,$$

όπου το σύμβολο * αναπαριστάνει μη αρνητικούς αριθμούς.

Αν η κατάσταση j είναι προσβάσιμη από την κατάσταση i και επιπλέον η κατάσταση i είναι προσβάσιμη από την κατάσταση j, τότε οι καταστάσεις i και j λέμε ότι *επικοινωνούν*.

Στο παράδειγμα των αποθεμάτων όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν.

Στο παράδειγμα του τζόγου οι καταστάσεις 2 και 3 δεν επικοινωνούν.

Γενικά ισχύουν οι εξής ιδιότητες. Κάθε κατάσταση επικοινωνεί με τον εαυτό της (επειδή $p_{ij}^{(0)} = P\{X_0 = i | X_0 = i\} = 1$). Αν η κατάσταση i επικοινωνεί με την κατάσταση j, τότε η κατάσταση j επικοινωνεί με την κατάσταση i. Αν η κατάσταση i επικοινωνεί με την κατάσταση j και η κατάσταση j επικοινωνεί με την κατάσταση k, τότε και η κατάσταση i επικοινωνεί με την κατάσταση k.

Ως αποτέλεσμα των τριών παραπάνω ιδιοτήτων, ο χώρος των καταστάσεων μπορεί να χωριστεί σε αμοιβαία αποκλειόμενες *κλάσεις* καταστάσεων, όπου καταστάσεις που επικοινωνούν ανήκουν στην ίδια κλάση. Αν υπάρχει μόνο μια κλάση, δηλαδή, αν όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν, τότε η Μαρκοβιανή αλυσίδα λέγεται *ανάγωγη* ή *αδιαχώριστη*.

Στο παράδειγμα των αποθεμάτων η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι ανάγωγη.

Στο πρώτο παράδειγμα με την μετοχή η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι ανάγωγη.

Στο παράδειγμα του τζόγου υπάρχουν 3 κλάσεις καταστάσεων. Η κατάσταση 0 ανήκει σε μια κλάση. Η κατάσταση 3 ανήκει σε μια άλλη κλάση. Οι καταστάσεις 1 και 2 ανήκουν σε άλλη κλάση.

Έστω f_{ii} η πιθανότητα η διαδικασία να επιστρέψει κάποτε στην κατάσταση i, δεδομένου ότι ξεκίνησε από την κατάσταση i. Η κατάσταση i ονομάζεται *επαναληπτική*, αν $f_{ii} = 1$ και *μεταβατική*, αν $f_{ii} < 1$. Ειδική περίπτωση μιας επαναληπτικής κατάστασης είναι μια *απορροφητική* κατάσταση. Μια κατάσταση i λέγεται απορροφητική αν η πιθανότητα μετάβασης (ενός βήματος) p_{ii} ισούται με 1. Ο προσδιορισμός του αν μια κατάσταση είναι επαναληπτική ή μεταβατική εξετάζοντας την τιμή του f_{ii} δεν είναι εύκολος γιατί το f_{ii} συχνά δεν μπορεί να υπολογιστεί εύκολα.

Στο παράδειγμα των αποθεμάτων, αν και όλες οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές (όπως θα δειχθεί αργότερα), δεν είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι $f_{ii} = 1$ για όλα τα i.

Στο παράδειγμα του τζόγου οι καταστάσεις 0 και 3 είναι απορροφητικές καταστάσεις (κάθε μια ανήκει σε διαφορετική κλάση) και άρα είναι και επαναληπτικές. Έτσι, $f_{00} = f_{33} = 1$.

Όμως οι καταστάσεις 1 και 2 είναι μεταβατικές και δεν είναι εύκολο να δειχθεί ότι τα f_{11} και f_{22} είναι μικρότερα του 1.

Αν και ο προσδιορισμός της ίδιας της τιμής του f_{ii} είναι δύσκολος, είναι δυνατό να προσδιοριστούν μερικές ιδιότητες του f_{ii} που μπορεί να είναι χρήσιμες για τον προσδιορισμό της τιμής του. Τέτοιες ιδιότητες είναι οι παρακάτω.

Αν μια Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι στην κατάσταση i και η κατάσταση i είναι επαναληπτική, η πιθανότητα ότι η διαδικασία θα επιστρέψει σε αυτή την κατάσταση είναι 1 ($f_{ii} = 1$). Αφού η διαδικασία είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα αυτό σημαίνει ότι η διαδικασία θα ξεκινάει ξανά από την κατάσταση i και με πιθανότητα 1 θα επιστρέφει ξανά στην κατάσταση αυτή, κοκ. Με άλλα λόγια, η διαδικασία θα επισκεφθεί την κατάσταση i άπειρες φορές. Συνεπώς, μια επαναληπτική κατάσταση έχει την ιδιότητα ότι ο προσδοκώμενος αριθμός των χρονικών περιόδων όπου η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση i είναι *άπειρος*.

Αν μια Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι στην κατάσταση i και η κατάσταση i είναι μεταβατική, η πιθανότητα ότι η διαδικασία θα επιστρέψει σε αυτή την κατάσταση είναι μικρότερη από 1 ($f_{ii} < 1$) και η πιθανότητα ότι δεν θα επιστρέψει σ' αυτή την κατάσταση είναι μεγαλύτερη από το 0 ($1 - f_{ii} > 0$). Είναι εύκολο να δειχθεί ότι ο προσδοκώμενος αριθμός των χρονικών περιόδων όπου η διαδικασία θα βρίσκεται στην κατάσταση i είναι *πεπερασμένος* και ίσος με

$$\frac{1}{1 - f_{ii}}.$$

Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι η κατάσταση i είναι επαναληπτική αν και μόνο αν, ο προσδοκώμενος αριθμός των χρονικών περιόδων που η διαδικασία είναι στην κατάσταση i, δεδομένου ότι ξεκίνησε από την κατάσταση i, είναι άπειρος.

Για να υπολογισθεί ο προσδοκώμενος αριθμός των χρονικών περιόδων όπου η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση i, δεδομένου ότι $X_0 = i$, ορίζουμε την παρακάτω μεταβλητή:

$$B_n = \begin{cases} 1, & \text{αν } X_n = i, \\ 0, & \text{αν } X_n \neq i. \end{cases}$$

Η ποσότητα $\sum_{n=1}^{\infty} B_n \big| X_0 = i$ αναπαριστάνει τον αριθμό των περιόδων όπου η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση i, δεδομένου ότι $X_0 = i$. Έτσι, η προσδοκώμενη τιμή του είναι:

$$\begin{aligned} E(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \mid X_0 = i) &= \sum_{n=1}^{\infty} E(B_n \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n = i \mid X_0 = i\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}. \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι μια κατάσταση i είναι επαναληπτική αν και μόνο αν:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty.$$

Από το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να δειχθεί ότι η *επάνοδος* (το ότι μία κατάσταση είναι επαναληπτική) είναι μια ιδιότητα που ισχύει για ολόκληρες κλάσεις. Δηλαδή όλες οι καταστάσεις σε μια κλάση είναι είτε επαναληπτικές είτε μεταβατικές. Επίσης σε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων δεν μπορεί να είναι μεταβατικές όλες οι καταστάσεις. Συνεπώς όλες οι καταστάσεις σε μια ανάγωγη Μαρκοβιανή αλυσίδα με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων είναι επαναληπτικές. Πράγματι, μπορεί κανείς να αναγνωρίσει μια ανάγωγη Μαρκοβιανή αλυσίδα με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων δείχνοντας ότι όλες οι καταστάσεις της διαδικασίας επικοινωνούν. Έχει μάλιστα ήδη σημειωθεί ότι μια ικανή συνθήκη ώστε όλες οι καταστάσεις να είναι προσβάσιμες (και άρα να επικοινωνούν μεταξύ τους) είναι να υπάρχει μια τιμή του n, ανεξάρτητη από τα i και j, για την οποία $p_{ij}^{(n)} > 0$, για όλα τα i και j.

Στο παράδειγμα των αποθεμάτων όλες οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές αφού $p_{ij}^{(2)} > 0$, για όλα τα i και j.

Στο πρώτο παράδειγμα με την μετοχή, όλες οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές αφού $p_{ij} > 0$, για όλα τα i και j.

Στο δεύτερο παράδειγμα με την μετοχή, όλες οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές αφού $p_{ij}^{(2)} > 0$, για όλα τα i και j.

Ας δούμε ένα νέο παράδειγμα. Έστω μια Μαρκοβιανή διαδικασία με τον παρακάτω πίνακα μετάβασης:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Είναι εμφανές ότι η κατάσταση 2 είναι απορροφητική (και άρα επαναληπτική), οι καταστάσεις 3 και 4 είναι μεταβατικές ενώ οι καταστάσεις 0 και 1 είναι επαναληπτικές.

Για να δεχθεί ότι οι καταστάσεις 0 και 1 είναι επαναληπτικές πρέπει να δεχθεί ότι $f_{00} = 1$ και $f_{11} = 1$, πράγμα που είναι δύσκολο. Εναλλακτικά, εξετάζουμε τον πίνακα μετάβασης n βημάτων ο οποίος έχει την παρακάτω μορφή:

$$\mathbf{P}^{(n)} = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

όπου το * αναπαριστάνει θετικούς αριθμούς. Συνεπάγεται ότι αν η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση 0, θα επιστρέψει στην κατάσταση 0 μετά από μερικά βήματα. Το ίδιο ισχύει για την κατάσταση 1.

Σε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα η *περίοδος* της κατάστασης i ορίζεται ως ο ακέραιος t ($t > 1$) ο οποίος είναι τέτοιος ώστε $p_{ii}^{(n)} = 0$ για όλες τις τιμές του n που είναι διάφορες των t, $2t$, $3t$, … και το t είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος με αυτή την ιδιότητα.

Στο παράδειγμα με τον τζόγο, η διαδικασία είναι δυνατό, ξεκινώντας από την κατάσταση 1, να επιστρέψει στην κατάσταση 1 μόνο στους χρόνους 2, 4, … και άρα η περίοδος της κατάστασης 1 είναι 2.

Αν υπάρχουν δύο συνεχόμενοι αριθμοί s και (s + 1) τέτοιοι ώστε η διαδικασία να μπορεί να βρίσκεται στην κατάσταση i στους χρόνους s και (s + 1), η κατάσταση έχει περίοδο 1 και ονομάζεται *απεριοδική* κατάσταση. Η περιοδικότητα είναι ιδιότητα που ισχύει για ολόκληρες κλάσεις καταστάσεων. Έτσι, αν μια κατάσταση i σε μια κλάση έχει περίοδο t, τότε όλες οι καταστάσεις σε αυτή την κλάση έχουν περίοδο t.

Στο παράδειγμα με τον τζόγο, η κατάσταση 2 έχει κι αυτή περίοδο 2.

Μια επαναληπτική κατάσταση i ονομάζεται *θετικά επαναληπτική* αν, ξεκινώντας από την κατάσταση i, ο προσδοκώμενος χρόνος για να επανέλθει η διαδικασία στην κατάσταση i είναι πεπερασμένος. Αντίστοιχα, μια επαναληπτική κατάσταση i ονομάζεται *μηδενική επαναληπτική* αν, ξεκινώντας από την κατάσταση i, ο προσδοκώμενος χρόνος για να επανέλθει η διαδικασία στην κατάσταση i είναι άπειρος. Μπορεί να δειχθεί ότι για μια Μαρκοβιανή διαδικασία με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων όλες οι επαναληπτικές καταστάσεις είναι θετικά επαναληπτικές καταστάσεις. Οι θετικά επαναληπτικές καταστάσεις που είναι απεριοδικές ονομάζονται *εργοδικές*.

1.4 Χρόνος Πρώτης Διάβασης

Ο *χρόνος πρώτης διάβασης* πηγαίνοντας από την κατάσταση i στην κατάσταση j είναι ο αριθμός των μεταβάσεων της διαδικασίας πηγαίνοντας από την κατάσταση i στην κατάσταση j *για πρώτη φορά*. Όταν $j = i$ τότε ο χρόνος πρώτης διάβασης είναι ο αριθμός των μεταβάσεων μέχρις ότου η διαδικασία επιστρέψει στην αρχική κατάσταση i. Σε αυτή την περίπτωση ο χρόνος πρώτης διάβασης ονομάζεται *χρόνος επανόδου* για την κατάσταση i.

Στο παράδειγμα των αποθεμάτων υποθέσαμε ότι $X_0 = 3$. Έστω ότι η διαδικασία του αποθέματος εξελίσσεται ως εξής για τις επόμενες 5 εβδομάδες: $X_1 = 2$, $X_2 = 1$, $X_3 = 0$, $X_4 = 3$, $X_5 = 1$. Σε αυτή την περίπτωση ο χρόνος πρώτης διάβασης πηγαίνοντας από την κατάσταση 3 στην κατάσταση 1 είναι 2, ο χρόνος πρώτης διάβασης από την κατάσταση 3 στην κατάσταση 0 είναι 3 και ο χρόνος επανόδου για την κατάσταση 3 είναι 4.

Γενικά, οι χρόνοι πρώτης διάβασης είναι τυχαίες μεταβλητές με κατανομές πιθανότητας που εξαρτώνται από τις πιθανότητες μετάβασης της διαδικασίας.

Έστω $f_{ij}^{(n)}$ η πιθανότητα ο χρόνος πρώτης διάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j να ισούται με n, δηλαδή,

$$f_{ij}^{(n)} = P\left\{X_n = j, X_k \neq j, k = 1, 2, \ldots, n-1 \middle| X_0 = i\right\}$$

Μπορεί να δειχθεί ότι οι πιθανότητες $f_{ij}^{(n)}$ ικανοποιούν τις παρακάτω επαναληπτικές σχέσεις:

$$\begin{aligned}
f_{ij}^{(1)} &= p_{ij}^{(1)} = p_{ij} \\
f_{ij}^{(2)} &= p_{ij}^{(2)} - f_{ij}^{(1)} p_{jj} \\
&\vdots \\
f_{ij}^{(n)} &= p_{ij}^{(n)} - f_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(n-1)} - f_{ij}^{(2)} p_{jj}^{(n-2)} \cdots - f_{ij}^{(n-i)} p_{jj}.
\end{aligned}$$

Στο παράδειγμα των αποθεμάτων η κατανομή πιθανότητας του χρόνου πρώτης διάβασης από την κατάσταση 3 στην κατάσταση 0 υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
f_{30}^{(1)} &= 0{,}080 \\
f_{30}^{(2)} &= (0{,}249) - (0{,}080)(0{,}080) = 0{,}243 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Για δεδομένα i και j, τα $f_{ij}^{(n)}$ είναι μη-αρνητικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \leq 1 .$$

Ας συμβολίσουμε το παραπάνω άθροισμα με f_{ij}, δηλαδή,

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} .$$

Το f_{ij} εκφράζει την πιθανότητα η Μαρκοβιανή αλυσίδα να μεταβεί *κάποτε* στην κατάσταση j, έχοντας ξεκινήσει από την κατάσταση i. Σημειώστε ότι το f_{ii} είναι η πιθανότητα η διαδικασία να επιστρέψει κάποτε στην κατάσταση i, δεδομένου ότι ξεκίνησε από την κατάσταση i, που αναφέρθηκε στην ενότητα 1.3. Δυστυχώς, το f_{ij} μπορεί να είναι αυστηρά μικρότερο από 1, που σημαίνει ότι μια διαδικασία που αρχικά βρίσκεται στην κατάσταση i, μπορεί να μην φτάσει ποτέ στην κατάσταση j. Όταν το άθροισμα ισούται με 1, τότε το $f_{ij}^{(n)}$ (για n = 1, 2, …) μπορεί να θεωρηθεί ως η κατανομή πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής "χρόνος πρώτης διάβασης".

Αν και ο υπολογισμός του $f_{ij}^{(n)}$ για όλα τα n μπορεί να είναι δύσκολος, ο υπολογισμός του προσδοκώμενου χρόνου πρώτης διάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j είναι σχετικά απλός. Έστω μ_{ij} αυτή η προσδοκώμενη τιμή, που ορίζεται από τις εκφράσεις:

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \infty, & \text{αν } \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} < 1, \\ \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}, & \text{αν } \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1. \end{cases}$$

Οποτεδήποτε $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1$, τότε τα μ_{ij} ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= p_{ij} 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} (1 + \mu_{kj}) = p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} + \sum_{k \neq j} p_{ik} \mu_{kj} \\ &= 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} \mu_{kj} . \end{aligned}$$

Όταν $i = j$, το μ_{ii} ονομάζεται *προσδοκώμενος χρόνος επανόδου*.

Στο παράδειγμα των αποθεμάτων ο προσδοκώμενος χρόνος πρώτης διάβασης μ_{30} μπορεί να υπολογισθεί ως εξής (εφόσον όλες οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές):

$$\begin{aligned} \mu_{30} &= 1 + p_{31}\mu_{10} + p_{32}\mu_{20} + p_{33}\mu_{30} , \\ \mu_{20} &= 1 + p_{21}\mu_{10} + p_{22}\mu_{20} + p_{23}\mu_{30} , \\ \mu_{10} &= 1 + p_{11}\mu_{10} + p_{12}\mu_{20} + p_{13}\mu_{30} , \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} \mu_{30} &= 1 + 0{,}184\mu_{10} + 0{,}368\mu_{20} + 0{,}368\mu_{30} , \\ \mu_{20} &= 1 + 0{,}368\mu_{10} + 0{,}368\mu_{20} , \\ \mu_{10} &= 1 + 0{,}368\mu_{10} . \end{aligned}$$

Η ταυτόχρονη λύση του παραπάνω συστήματος εξισώσεων είναι:

$$\mu_{10} = 1{,}58, \qquad \mu_{20} = 2{,}51, \qquad \mu_{30} = 3{,}5.$$

Συνεπώς ο προσδοκώμενος χρόνος μέχρις ότου εξαντληθούν οι φωτογραφικές μηχανές είναι 3,5 εβδομάδες.

1.5 Μακροχρόνιες Ιδιότητες των Μαρκοβιανών Αλυσίδων

Στην ενότητα 1.4 επικεντρώσαμε την προσοχή μας στην ανάλυση μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας σε κατάσταση μετάβασης, δηλαδή όταν ο χρονικός ορίζοντας που εξετάζουμε την Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι αρκετά μικρός ούτως ώστε η πιθανότητα η διαδικασία να βρίσκεται στην μία ή στην άλλη κατάσταση να εξαρτάται από την αρχική κατάσταση. Σε αυτήν την ενότητα θα εστιάσουμε την προσοχή στην ανάλυση μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας σε μόνιμη κατάσταση, όπου ο χρονικός ορίζοντας που εξετάζουμε την Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι αρκετά μεγάλος ούτως ώστε η πιθανότητα η διαδικασία να βρίσκεται στην μία ή στην άλλη κατάσταση να μην εξαρτάται από την αρχική κατάσταση.

Πιθανότητες Μόνιμης Κατάστασης

Στην σελίδα 8 υπολογίστηκε ο πίνακας μετάβασης 2 βημάτων για το παράδειγμα των αποθεμάτων. Ας εξετάσουμε ακόμα τους πίνακες μετάβασης 4 βημάτων και 8 βημάτων.

$$\mathbf{P}^{(4)} = \mathbf{P}^4 = \mathbf{P}^{(2)}\mathbf{P}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}289 & 0{,}286 & 0{,}261 & 0{,}164 \\ 0{,}282 & 0{,}285 & 0{,}268 & 0{,}166 \\ 0{,}284 & 0{,}283 & 0{,}263 & 0{,}171 \\ 0{,}289 & 0{,}286 & 0{,}261 & 0{,}164 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}^{(8)} = \mathbf{P}^8 = \mathbf{P}^{(4)}\mathbf{P}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0{,}286 & 0{,}285 & 0{,}264 & 0{,}166 \\ 0{,}286 & 0{,}285 & 0{,}264 & 0{,}166 \\ 0{,}286 & 0{,}285 & 0{,}264 & 0{,}166 \\ 0{,}286 & 0{,}285 & 0{,}264 & 0{,}166 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε το αξιοσημείωτο γεγονός ότι κάθε μία από τις 4 σειρές του $\mathbf{P}^{(8)}$ έχουν ίδια ακριβώς στοιχεία. Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα η διαδικασία να βρίσκεται στην κατάσταση j μετά από 8 εβδομάδες φαίνεται να είναι ανεξάρτητη από την αρχική κατάσταση του αποθέματος. Με άλλα λόγια, φαίνεται ότι υπάρχει μια οριακή πιθανότητα ότι η διαδικασία θα βρίσκεται στην κατάσταση j μετά από ένα μεγάλο αριθμό μεταβάσεων και αυτή η πιθανότητα είναι ανεξάρτητη από την αρχική κατάσταση. Ακολουθεί ένα σημαντικό αποτέλεσμα.

Για μια ανάγωγη εργοδική (θετικά επαναληπτική και εργοδική) Μαρκοβιανή αλυσίδα μπορεί να δειχθεί ότι το όριο $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ υπάρχει και είναι ανεξάρτητο του i. Μάλιστα ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, \; j = 0, 1, 2, \ldots, M,$$

όπου τα π_j ικανοποιούν μοναδικά τις παρακάτω εξισώσεις μόνιμης κατάστασης:

$$\pi_j > 0, j = 0, 1, 2, \ldots, M,$$

$$\pi_j = \sum_{k=0}^{M} \pi_k p_{kj}, \; j = 0, 1, 2, \ldots, M,$$

$$\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1.$$

Η δεύτερη από τις τρεις παραπάνω σχέσεις προκύπτει από τους ορισμούς, αφού

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{M} p_{ik}^{(n-1)} p_{kj} = \sum_{k=0}^{M} \lim_{n\to\infty} p_{ik}^{(n-1)} p_{kj} = \sum_{k=0}^{M} \pi_k p_{kj}.$$

Τα π_j ονομάζονται *πιθανότητες μόνιμης κατάστασης* της Μαρκοβιανής αλυσίδας και ισούνται με το αντίστροφο του προσδοκώμενου χρόνου επανόδου, δηλαδή,

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}}, \text{ για } j = 0, 1, 2, \ldots, M.$$

Ο όρος πιθανότητα μόνιμης κατάστασης σημαίνει ότι η πιθανότητα να βρεθεί η διαδικασία σε μια συγκεκριμένη κατάσταση, ας πούμε την j, μετά από ένα μεγάλο αριθμό μεταβάσεων τείνει στην τιμή π_j ανεξάρτητα από την αρχική κατανομή πιθανότητας για όλες τις καταστάσεις.

Είναι σημαντικό να τονισθεί ότι η πιθανότητα μόνιμης κατάστασης *δεν* υπονοεί ότι η διαδικασία εγκαθίσταται σε μια κατάσταση. Αντίθετα, η διαδικασία συνεχίζει να μεταβαίνει από τη μια κατάσταση στην άλλη, και σε κάθε βήμα η πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j εξακολουθεί να είναι p_{ij}.

Τα π_j μπορούν να ερμηνευτούν και ως στάσιμες πιθανότητες (που δεν πρέπει να συγχέονται με τις στάσιμες πιθανότητες μετάβασης). Αν η αρχική απόλυτη πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση j δίνεται από το π_j (δηλαδή, $P\{X_0 = j\} = \pi_j$) για όλα τα j, τότε η απόλυτη πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση j στον χρόνο n, n = 1, 2, 3, … δίνεται από το π_j επίσης (δηλαδή $P\{X_n = j\} = \pi_j$).

Ας σημειωθεί ότι οι εξισώσεις μόνιμης κατάστασης αποτελούνται από (M + 2) εξισώσεις με (M + 1) αγνώστους. Επειδή το σύστημα εξισώσεων έχει μια μοναδική λύση, τουλάχιστον μια εξίσωση πρέπει να είναι περιττή (γραμμικά εξαρτημένη από άλλες) και άρα μπορεί να διαγραφεί. Αυτή δεν μπορεί να είναι η εξίσωση

$$\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1,$$

γιατί τότε η λύση $\pi_j = 0$, για όλα τα j, θα ικανοποιούσε τις άλλες (M + 1) εξισώσεις.

Στο παράδειγμα των αποθεμάτων οι εξισώσεις της μόνιμης κατάστασης είναι:

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \pi_0 p_{00} + \pi_1 p_{10} + \pi_2 p_{20} + \pi_3 p_{30} \\
\pi_1 &= \pi_0 p_{01} + \pi_1 p_{11} + \pi_2 p_{21} + \pi_3 p_{31} \\
\pi_2 &= \pi_0 p_{02} + \pi_1 p_{12} + \pi_2 p_{22} + \pi_3 p_{32} \\
\pi_3 &= \pi_0 p_{03} + \pi_1 p_{13} + \pi_2 p_{23} + \pi_3 p_{33} \\
1 &= \pi_0 \quad + \pi_1 \quad + \pi_2 \quad + \pi_3.
\end{aligned}$$

Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές p_{ij} στις παραπάνω εξισώσεις και λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων, λαμβάνουμε τις ταυτόχρονες λύσεις:

$$\pi_0 = 0{,}285, \qquad \pi_1 = 0{,}285, \qquad \pi_2 = 0{,}264, \qquad \pi_3 = 0{,}166,$$

που είναι τα αποτελέσματα που εμφανίζονται στον πίνακα $\mathbf{P}^{(8)}$. Οι αντίστοιχοι προσδοκώμενοι χρόνοι επανόδου είναι:

$$\mu_{00} = \frac{1}{\pi_0} = 3{,}51, \qquad \mu_{11} = \frac{1}{\pi_1} = 3{,}51, \qquad \mu_{22} = \frac{1}{\pi_2} = 3{,}79, \qquad \mu_{33} = \frac{1}{\pi_3} = 6{,}02.$$

Άλλα σημαντικά αποτελέσματα σχετικά με τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης είναι τα παρακάτω.

Αν οι i και j είναι επαναληπτικές καταστάσεις που ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις, τότε $p_{ij}^{(n)} = 0$ για όλα τα n.

Παρόμοια, αν η κατάσταση j είναι μεταβατική, τότε $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ για όλα τα i.

Το παραπάνω αποτέλεσμα υποδηλώνει ότι η πιθανότητα να βρεθεί η διαδικασία σε μια μεταβατική κατάσταση μετά από ένα μεγάλο αριθμό μεταβάσεων τείνει στο μηδέν.

Προσδοκώμενο Μέσο Κόστος ανά Μονάδα Χρόνου

Πιο πάνω ασχοληθήκαμε με Μαρκοβιανές αλυσίδες των οποίων οι καταστάσεις ήταν εργοδικές (θετικά επαναληπτικές και απεριοδικές). Αν χαλαρώσουμε την απαίτηση ότι οι καταστάσεις πρέπει να είναι απεριοδικές, τότε το όριο $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ μπορεί να μην υπάρχει. Για παράδειγμα, έστω ο πίνακας μετάβασης δύο καταστάσεων:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αν η διαδικασία ξεκινήσει στην κατάσταση 0 στον χρόνο 0, τότε θα βρίσκεται στην κατάσταση 0 στους χρόνους 2, 4, 6, … και στην κατάσταση 1 στους χρόνους 1, 3, 5, … Συνεπώς $p_{00}^{(n)} = 1$, αν το n είναι ζυγός και $p_{00}^{(n)} = 0$, αν το n είναι μονός αριθμός και το όριο $\lim_{n\to\infty} p_{00}^{(n)}$ δεν υπάρχει.

Παρόλα αυτά το παρακάτω όριο πάντα υπάρχει:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)}\right\}.$$

Για μια ανάγωγη Μαρκοβιανή αλυσίδα με θετικά επαναληπτικές καταστάσεις, π.χ. μια αλυσίδα με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων, τότε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)}\right\} = \pi_j,$$

όπου τα π_j ικανοποιούν τις εξισώσεις μόνιμης κατάστασης που αναφέρθηκαν στη σελίδα 14.

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι σημαντικό για τον υπολογισμό του μακροχρόνιου μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου που σχετίζεται με μια Μαρκοβιανή αλυσίδα.

Ας υποθέσουμε ότι ένα κόστος (ή άλλη συνάρτηση ποινής) $C(X_t)$ προκαλείται όταν η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση X_t στο χρόνο t, για $t = 0, 1, 2, \ldots$ Να σημειωθεί ότι το $C(X_t)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή που παίρνει τις τιμές $C(0)$, $C(1)$, ..., $C(M)$ και η συνάρτηση $C(\cdot)$ είναι ανεξάρτητη του t. Το προσδοκώμενο μέσο κόστος που δημιουργείται για τις πρώτες n περιόδους δίνεται από την έκφραση:

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t)\right].$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)}\right\} = \pi_j,$$

είναι εύκολο να δειχτεί ότι το (μακροχρόνιο) *προσδοκώμενο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου* δίνεται από το

$$\lim_{n\to\infty}\left\{E\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}C(X_t)\right]\right\}=\sum_{j=0}^{M}\pi_j C(j).$$

Στο παράδειγμα των αποθεμάτων, ας υποθέσουμε ότι το μαγαζί φωτογραφικών μηχανών βρίσκει ότι υπάρχει το εξής κόστος για κάθε φωτογραφική μηχανή που έχει στο απόθεμά του: Αν $X_t = 0$, τότε $C(0) = 0$. Αν $X_t = 1$, τότε $C(1) = 2$. Αν $X_t = 2$, τότε $C(2) = 8$. Αν $X_t = 3$, τότε $C(3) = 18$. Τότε το μακροχρόνιο προσδοκώμενο μέσο κόστος της διατήρησης αποθέματος ανά εβδομάδα μπορεί να υπολογισθεί από την παραπάνω εξίσωση ως εξής:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{E\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}C(X_t)\right]\right\}=0(0{,}285)+2(0{,}285)+8(0{,}264)+18(0{,}166)=5{,}67.$$

Ας σημειωθεί ότι ένα εναλλακτικό, από το (μακροχρόνιο) προσδοκώμενο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου, μέτρο απόδοσης του συστήματος είναι το (μακροχρόνιο) *πραγματικό μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου*. Μπορεί να δειχτεί ότι αυτό το τελευταίο δίνεται από την εξής έκφραση:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}C(X_t)\right\}=\sum_{j=0}^{M}\pi_j C(j),$$

για σχεδόν όλες τις διαδρομές της διαδικασίας. Έτσι και τα δύο μέτρα οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα.

Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για να ερμηνευτούν τα π_j. Έστω:

$$C(X_k)=\begin{cases}1, & \text{αν } X_k = j,\\ 0, & \text{αν } X_k \neq j.\end{cases}$$

Τότε, τ (μακροχρόνιο) προσδοκώμενο ποσοστό των φορών που το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση j δίνεται από το:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{E\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}C(X_t)\right]\right\}=\lim_{n\to\infty}\{E[\%\text{ των φορών που το σύστημα είναι στην κατάσταση } j]\}=\pi_j.$$

Παρόμοια, το π_j μπορεί να ερμηνευτεί ως το (μακροχρόνιο) πραγματικό ποσοστό των φορών που το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση j.

Προσδοκώμενο Μέσο Κόστος ανά Μονάδα Χρόνου για Πολύπλοκες Συναρτήσεις Κόστους

Πρωτύτερα, υποθέσαμε ότι η συνάρτηση κόστους εξαρτάται αποκλειστικά από την κατάσταση της διαδικασίας στο χρόνο t, X_t. Σε πολλά προβλήματα όμως το κόστος μπορεί να εξαρτάται και από κάποια ή κάποιες άλλες τυχαίες μεταβλητές εκτός από την κατάσταση της διαδικασίας.

Στο παράδειγμα των αποθεμάτων, έστω ότι τα κόστη του συστήματος είναι το κόστος παραγγελίας και το κόστος-ποινή για ζητήσεις που δεν ικανοποιούνται (τα κόστη αποθήκευσης αγνοούνται). Υποθέτουμε ότι ο αριθμός των φωτογραφικών μηχανών που παραγγέλνονται εξαρτάται μόνο από την κατάσταση του συστήματος (αριθμός φωτογραφικών μηχανών σε απόθεμα). Ακόμα, υποθέτουμε ότι το κόστος των ανικανοποίητων ζητήσεων εξαρτάται από την εβδομαδιαία ζήτηση και από την κατάσταση του συστήματος στην αρχή της εβδομάδας. Τότε, το κόστος του συστήματος στην περίοδο t μπορεί να περιγραφεί ως συνάρτηση του X_{t-1} και του D_t, δηλαδή $C(X_{t-1}, D_t)$. Ας σημειωθεί ότι οι ζητήσεις D_t, D_{t+1}, … κατά τη διάρκεια συνεχόμενων περιόδων είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με την ίδια κατανομή.

Το $X_{t\text{-}1}$ (απόθεμα στο τέλος της περιόδου t-1) δίνεται από την επαναληπτική σχέση στη σελίδα 3. Έτσι, τα (X_0, X_1, X_2, …, $X_{t\text{-}1}$) και D_t είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους αφού τα X_0, X_1, X_2, …, $X_{t\text{-}1}$ είναι συναρτήσεις μόνο των X_0, D_1, …, $D_{t\text{-}1}$ που είναι ανεξάρτητα από το D_t.

Κάτω από αυτές τις συνθήκες μπορεί να δειχθεί ότι το (μακροχρόνιο) προσδοκώμενο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου δίνεται από το

$$\lim_{n\to\infty}\left\{E\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}C\left(X_{t-1},D_t\right)\right]\right\}=\sum_{j=0}^{M}k(j)\pi_j\ ,$$

όπου

$$k(j)=E\left[C(j,D_t)\right]$$

και η τελευταία προσδοκώμενη τιμή λαμβάνεται ως προς την κατανομή πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής D_t.

Παρόμοια, το (μακροχρόνιο) πραγματικό κόστος ανά μονάδα χρόνου δίνεται από το

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}C\left(X_{t-1},D_t\right)\right\}=\sum_{j=0}^{M}k(j)\pi_j\ .$$

Ας υποθέσουμε τα εξής κόστη. Αν παραγγελθούν z > 0 φωτογραφικές μηχανές, το κόστος είναι 10 + 25z δολάρια. Αν δεν παραγγελθούν φωτογραφικές μηχανές, δεν υπάρχουν κόστη παραγγελίας. Τέλος, για κάθε μονάδα ανικανοποίητης ζήτησης (χαμένης πώλησης) υπάρχει μια ποινή 50 δολαρίων.

Αν ακολουθηθεί η πολιτική (s = 1, S = 3) για τις παραγγελίες, τότε το κόστος την εβδομάδα t δίνεται από το $C(X_{t\text{-}1}, D_t)$, όπου

$$C\left(X_{t-1},D_t\right)=\begin{cases}10+25(3)+50\max\{(D_t-3),0\}, & \text{αν } X_{t-1}<1,\\ 50\max\{(D_t-X_{t-1}),0\}, & \text{αν } X_{t-1}\geq 1,\end{cases}$$

για t = 0, 1, 2, … Έτσι:

$$C(0,D_t)=85+50\max\{(D_t-3),0\},$$

ώστε

$$\begin{aligned}k(0)&=E\left[C(0,D_t)\right]\\&=85+50E\left[\max\{(D_t-3),0\}\right]\\&=85+50\left[1P_D(4)+2P_D(5)+3P_D(6)+\ldots\right],\end{aligned}$$

όπου το $P_D(i)$ είναι η πιθανότητα η ζήτηση να ισούται με i και έχει υποτεθεί ότι έχει κατανομή Poisson με παράμετρο λ = 1. Κάνοντας τους υπολογισμούς προκύπτει ότι $k(0)$ = 86,2. Παρόμοιοι υπολογισμοί οδηγούν στα παρακάτω αποτελέσματα:

$$\begin{aligned}k(1)&=E\left[C(1,D_t)\right]\\&=50E\left[\max\{(D_t-1),0\}\right]\\&=50\left[1P_D(2)+2P_D(3)+3P_D(4)+\ldots\right]\\&=18{,}4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k(2)&=E\left[C(2,D_t)\right]\\&=50E\left[\max\{(D_t-2),0\}\right]\\&=50\left[1P_D(3)+2P_D(4)+3P_D(5)+\ldots\right]\\&=5{,}2.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
k(3) &= E[C(3, D_t)] \\
&= 50E[\max\{(D_t - 3), 0\}] \\
&= 50[1P_D(4) + 2P_D(5) + 3P_D(6) + \ldots] \\
&= 1{,}2.
\end{aligned}
$$

Έτσι το (μακροχρόνιο) προσδοκώμενο μέσο κόστος ανά εβδομάδα είναι:

$$\sum_{j=0}^{3} k(j)\pi_j = (86{,}5)(0{,}285) + (18{,}4)(0{,}285) + (5{,}2)(0{,}264) + (1{,}2)(0{,}166) = 31{,}4\,.$$

Το παραπάνω κόστος είναι το κόστος που αντιστοιχεί στην πολιτική παραγγελίας (s, S) με (s = 1, S = 3). Το κόστος που αντιστοιχεί στην πολιτική(s, S) με άλλες τιμές των παραμέτρων s και S μπορεί να υπολογιστεί παρομοίως έτσι ώστε να αναγνωριστούν οι τιμές εκείνες (s, S) που ελαχιστοποιούν το προσδοκώμενο μέσο κόστος ανά εβδομάδα.

Τα παραπάνω αποτελέσματα παρουσιάστηκαν για το παράδειγμα των αποθεμάτων. Όμως παρόμοια αποτελέσματα ισχύουν και για άλλα προβλήματα εφόσον ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

1. Το $\{X_t\}$ είναι μια ανάγωγη Μαρκοβιανή αλυσίδα της οποίας οι καταστάσεις είναι θετικά επαναληπτικές.
2. Μ' αυτή την Μαρκοβιανή αλυσίδα σχετίζεται μια αλληλουχία τυχαίων μεταβλητών $\{D_t\}$ που είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και έχουν ίδια κατανομή.
3. Για κάποιο σταθερό $m = \pm 1, \pm 2, ...$ υπάρχει ένα κόστος $C(X_t, D_{t+m})$ στον χρόνο t για t = 0, 1, 2, …
4. Η αλληλουχία (X_0, X_1, X_2, …, X_t) πρέπει να είναι ανεξάρτητη του D_{t+m}.

Αν οι παραπάνω συνθήκες ικανοποιούνται, τότε

$$\lim_{n\to\infty}\left\{E\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t, D_{t+m})\right]\right\} = \sum_{j=0}^{M} k(j)\pi_j\,,$$

όπου

$$k(j) = E[C(j, D_{t+m})]$$

και η τελευταία προσδοκώμενη τιμή λαμβάνεται ως προς την κατανομή πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής D_t (δεδομένης της κατάστασης). Ακόμα

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t, D_{t+m})\right\} = \sum_{j=0}^{M} k(j)\pi_j$$

για σχεδόν όλες τις διαδρομές της διαδικασίας.

1.6 Καταστάσεις Απορρόφησης

Μια κατάσταση k ονομάζεται *απορροφητική* αν p_{kk} = 1, έτσι ώστε μόλις η αλυσίδα επισκεφτεί την k μένει εκεί για πάντα. Αν η κατάσταση k είναι απορροφητική, τότε η πιθανότητα πρώτης διάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση k ονομάζεται πιθανότητα απορρόφησης στην k έχοντας ξεκινήσει από την i.

Όταν υπάρχουν δύο ή περισσότερες απορροφητικές καταστάσεις σε μια αλυσίδα και συνεπώς η αλυσίδα πρόκειται να απορροφηθεί σε μια από αυτές τις καταστάσεις, τότε είναι επιθυμητό να βρούμε αυτές τις πιθανότητες απορρόφησης. Αν λοιπόν η κατάσταση k είναι απορροφητική, τότε το σύνολο των πιθανοτήτων απορρόφησης f_{ik} ικανοποιεί το σύστημα εξισώσεων:

$$f_{ik} = \sum_{j=0}^{M} p_{ij} f_{jk} \quad \text{για } i = 0, 1, \ldots, M,$$

υπό τις συνθήκες:

$$f_{kk} = 1 \text{ και } f_{ik} = 0, \text{ αν η κατάσταση } i \text{ είναι επαναληπτική και } i \neq k.$$

Οι πιθανότητες απορρόφησης είναι σημαντικές στους λεγόμενους "τυχαίους περιπάτους". Ένας *τυχαίος περίπατος* είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με την ιδιότητα ότι αν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i, τότε σε μια μετάβαση το σύστημα είτε παραμένει στην i είτε μετακινείται σε μια από τις καταστάσεις που γειτονεύουν άμεσα με την i.

Ένα παράδειγμα ενός τυχαίου περιπάτου είναι το παρακάτω παράδειγμα τζόγου που είναι παρόμοιο με αυτό στην σελίδα 7. Έστω ότι υπάρχουν 2 παίκτες και ο καθένας έχει 2 χιλιάρικα. Οι δύο παίκτες συμφωνούν να παίζουν ένα τυχερό παιχνίδι αλλεπάλληλες φορές και να στοιχηματίζουν 1 χιλιάρικο κάθε φορά μέχρι που ένας τους να χρεοκοπήσει. Η περιουσία του παίκτη Α είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πιθανές καταστάσεις τις 0, 1, 2, 3, 4 και πίνακα μετάβασης:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Αν το p είναι η πιθανότητα ότι ο παίκτης Α θα νικήσει σε ένα παιχνίδι, τότε η πιθανότητα απορρόφησης στην κατάσταση 0 (δηλαδή ο Α να χάσει όλα του τα χρήματα) μπορεί να υπολογισθεί από το παραπάνω σύστημα εξισώσεων. Μπορεί να δειχθεί ότι αυτές οι εξισώσεις οδηγούν στις εναλλακτικές εκφράσεις (για γενικό M αντί για $M = 4$ όπως σε αυτό το παράδειγμα),

$$1 - f_{i0} = \frac{\sum_{m=0}^{i-1} \rho^m}{\sum_{m=0}^{M-1} \rho^m}, \qquad \text{για } i = 1,2,\ldots,M,$$

$$= \frac{1-\rho^i}{1-\rho^M}, \qquad \text{για } p \neq \frac{1}{2},$$

$$= \frac{i}{M}, \qquad \text{για } p = \frac{1}{2},$$

όπου $\rho = \dfrac{1-p}{p}$.

Για $M = 4$, $i = 2$ και $p = \dfrac{2}{3}$, η πιθανότητα ο παίκτης Α να χρεοκοπήσει είναι

$$f_{20} = 1 - \left[\frac{1-\rho^2}{1-\rho^4}\right] = \frac{1}{5}$$

και η πιθανότητα να κερδίσει 4 χιλιάρικα (δηλαδή να χρεοκοπήσει ο παίκτης Β) είναι

$$f_{24} = 1 - f_{20} = \frac{4}{5}.$$

Άλλο παράδειγμα είναι ένα πολυκατάστημα στο οποίο το υπόλοιπο του λογαριασμού ενός πελάτη θεωρείται “πλήρως εξοφλημένο” (κατάσταση 0), “καθυστερημένο κατά 1-30 ημέρες” (κατάσταση 1), “καθυστερημένο κατά 31-60 ημέρες” (κατάσταση 2), ή “κακό χρέος” (κατάσταση 3). Οι λογαριασμοί όλων των πελατών ελέγχονται κάθε μήνα για να καθοριστεί η κατάστασή τους. Ενίοτε, οι πελάτες πληρώνουν μόνο μέρος του λογαριασμού τους. Αν αυτό συμβεί ενώ ο λογαριασμός είναι καθυστερημένος μέχρι 30 ημέρες (κατάσταση 1), το κατάστημα θεωρεί ότι ο πελάτης παραμένει στην κατάσταση 1. Αν αυτό συμβεί ενώ ο λογαριασμός είναι καθυστερημένος κατά 31-60 ημέρες, το κατάστημα θεωρεί ότι ο πελάτης μεταβαίνει στην κατάσταση 1. Οι πελάτες που είναι καθυστερημένοι περισσότερο από 60 ημέρες μπαίνουν στην κατηγορία του κακού χρέους (κατάσταση 3) και σ' αυτή την περίπτωση πρέπει να ληφθούν άμεσα μέτρα. Μετά από εξέταση πολλών δεδομένων των τελευταίων χρόνων, το μαγαζί έχει αναπτύξει τον παρακάτω πίνακα μεταβάσεων:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Αν και κάθε πελάτης κάποτε καταλήγει στην κατάσταση 0 ή 3, το μαγαζί ενδιαφέρεται να βρει την πιθανότητα ότι ένας πελάτης θα καταλήξει σαν κακό χρέος δεδομένου ότι ο λογαριασμός του ανήκει στην κατάσταση καθυστερημένων λογαριασμών κατά 1-30 ημέρες ή αντίστοιχα κατά 31-60 ημέρες.

Για να βρεθούν αυτές οι πιθανότητες πρέπει να λυθεί το σύνολο των εξισώσεων στη σελίδα 20. Έτσι πρέπει να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις για τους αγνώστους f_{13} και f_{23}:

$$f_{13} = p_{10}f_{03} + p_{11}f_{13} + p_{12}f_{23} + p_{13}f_{33}$$

$$f_{23} = p_{20}f_{03} + p_{21}f_{13} + p_{22}f_{23} + p_{23}f_{33}.$$

Σημειώνοντας ότι $f_{03} = 0$ και $f_{33} = 1$, έχουμε τις εξισώσεις:

$$(1 - p_{11})f_{13} = p_{13} + p_{12}f_{23},$$

$$(1 - p_{22})f_{23} = p_{23} + p_{21}f_{13}.$$

Αφού αντικατασταθούν οι τιμές από τον πίνακα μετάβασης, έχουμε:

$$0{,}8f_{13} = 0{,}1f_{23}$$

$$0{,}8f_{23} = 0{,}2 + 0{,}1f_{13}$$

και η λύση είναι:

$$f_{13} = 0{,}032, \quad f_{23} = 0{,}254.$$

Συνεπώς, περίπου 3% των πελατών των οποίων ο λογαριασμός είναι καθυστερημένος κατά 1-30 ημέρες καταλήγουν ως κακά χρέη, ενώ 25% των πελατών των οποίων ο λογαριασμός είναι καθυστερημένος κατά 31-60 ημέρες καταλήγουν ως κακά χρέη.

1.7 Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου

Στις προηγούμενες ενότητες υποθέσαμε ότι η παράμετρος t είναι ασυνεχής (δηλαδή $t = 0, 1, 2, \ldots$). Αυτή η υπόθεση είναι κατάλληλη για πολλά προβλήματα αλλά υπάρχουν περιπτώσεις (όπως για κάποια πρότυπα ουρών αναμονής) όπου απαιτείται μια συνεχής παράμετρος χρόνου.

Ακολουθώντας τους ορισμούς για τις Μαρκοβιανές αλυσίδες ασυνεχούς χρόνου, έστω $\{X(t)\}$, όπου $t \geq 0$, μια στοχαστική διαδικασία που παίρνει τις τιμές 0, 1, …, M. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται *Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου* αν οι πιθανότητες μετάβασης μπορούν να εκφραστούν ως

$$P\{X(t+s)=j|X(s)=i, X(r)=x(r)\} = P\{X(t+s)=j|X(s)=i\},$$

για όλα τα i, j = 0, 1, 2, …, M και $0 \leq r \leq s$. Επιπλέον, αν αυτές οι πιθανότητες μετάβασης είναι ανεξάρτητες του s , μπορούν να εκφραστούν ως:

$$p_{ij}(t) = P\{X(t+s)=j|X(s)=i\}$$

και ονομάζονται *στάσιμες πιθανότητες μετάβασης*. Η συνάρτηση αυτή υποτίθεται ότι είναι συνεχής στο $t = 0$, με

$$\lim_{t \to 0} p_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j, \\ 0, & \text{αν } i \neq j. \end{cases}$$

Να σημειωθεί ότι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου έχει την ιδιότητα ότι η πιθανότητα να συμβεί οποιαδήποτε μελλοντική περίσταση, δεδομένης οποιασδήποτε παρελθούσης περίστασης και της παρούσας κατάστασης, είναι *ανεξάρτητη* της παρελθούσης περίστασης και εξαρτάται μόνο από την παρούσα κατάσταση της διαδικασίας. Επιπλέον, αν η Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου είναι στάσιμη (όπως άλλωστε θα υποθέσουμε εφ' εξής), η πιθανότητα μετάβασης $p_{ij}(t)$ είναι ανεξάρτητη του χρόνου στον οποίο περιήλθε η παρούσα κατάσταση.

Αξίζει τον κόπο να εξερευνήσουμε τι παραπάνω σημαίνει η Μαρκοβιανή ιδιότητα. Η Μαρκοβιανή ιδιότητα (με στάσιμες πιθανότητες μετάβασης) σημαίνει ότι η πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση j στον χρόνο $t + s$, δεδομένου ότι το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i στον χρόνο s, δηλαδή η

$$P\{X(t+s)=j|X(s)=i\},$$

εξαρτάται μόνο από το i και j και την αυξανόμενη τιμή του t και είναι ανεξάρτητη του s. Δηλαδή μπορεί να εκφραστεί ως $p_{ij}(t)$. Παρόμοια, όταν $i = j$, η πιθανότητα το σύστημα να παραμένει στην κατάσταση i στο χρόνο $t + s$, δεδομένου ότι το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i στον χρόνο s, είναι ανεξάρτητη του s. Έτσι μπορεί να εκφραστεί ως $p_{ii}(t)$.

Τώρα ας θεωρήσουμε μια τυχαία μεταβλητή, την T_i, που αναπαριστάνει τον χρόνο που απαιτείται ώστε το σύστημα να μεταβεί έξω από την κατάσταση i. Το σύστημα παραμένει στην κατάσταση i στον χρόνο $t + s$, δεδομένου ότι το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i στον χρόνο s, δηλαδή $X(t+s)=i|X(s)=i$, αν και μόνο αν, ο χρόνος που απαιτείται ώστε το σύστημα να μεταβεί έξω από την κατάσταση i ξεπερνάει το $t + s$ όταν ο χρόνος που το σύστημα έχει ξοδέψει στην κατάσταση i ξεπερνάει το s, δηλαδή $T_i > t+s|T_i > s$. Έτσι:

$$P\{X(t+s)=i|X(s)=i\} = P\{T_i > t+s|T_i > s\}.$$

Παρόμοια, το σύστημα παραμένει στην κατάσταση i στον χρόνο t δεδομένου ότι το σύστημα ξεκινάει στην κατάσταση i στον χρόνο 0, δηλαδή $X(t)=i|X(0)=i$, αν και μόνο αν, ο χρόνος που απαιτείται ώστε το σύστημα να μεταβεί έξω από την κατάσταση i ξεπερνάει το t

όταν το σύστημα ξεκινάει στην κατάσταση i στον χρόνο 0, δηλαδή $T_i > t | T_i > 0$, ή ισοδύναμα, $T_\imath > t$. Έτσι:

$$P\{X(t) = i | X(0) = i\} = P\{T_i > t\}.$$

Η Μαρκοβιανή ιδιότητα (με στάσιμες πιθανότητες μετάβασης) σημαίνει ότι:

$$P\{X(t+s) = i | X(s) = i\} = P\{X(t) = i | X(0) = i\},$$

έτσι ώστε τελικά

$$P\{T_i > t + s | T_i > s\} = P\{T_i > t\}.$$

Η παραπάνω είναι μια αρκετά ασυνήθιστη ιδιότητα για μια κατανομή πιθανότητας. Λεει ότι η κατανομή πιθανότητας του χρόνου που απαιτείται ώστε το σύστημα να μεταβεί έξω από μια δεδομένη κατάσταση είναι πάντα η ίδια, άσχετα από το πόσο χρόνο το σύστημα έχει ήδη ξοδέψει σε αυτή την κατάσταση. Στην πραγματικότητα η τυχαία μεταβλητή είναι χωρίς μνήμη (η διαδικασία ξεχνά την ιστορία της). Υπάρχει μόνο μια (συνεχής) κατανομή πιθανότητας που έχει αυτή την ιδιότητα, και αυτή είναι η *εκθετική* κατανομή με μέση τιμή, ας πούμε, $1/q$ (βλέπε ενότητα 8.4 στο βιβλίο για μια πλήρη συζήτηση αυτής της κατανομής), δηλαδή:

$$P\{T_i < t\} = 1 - e^{-tq}, \text{ για } t \geq 0.$$

Αυτό το αποτέλεσμα οδηγεί σε έναν ισοδύναμο τρόπο ορισμού μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου. Μια στοχαστική διαδικασία $\{X(t)\}$, όπου $t \geq 0$, που παίρνει τιμές 0, 1, …, M είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου αν:

1. Κάθε φορά που η διαδικασία εισέρχεται στην κατάσταση i, ο χρόνος που ξοδεύει σε αυτή την κατάσταση πριν μεταβεί σε μια διαφορετική κατάσταση έχει εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/q_i$.
2. Όταν φύγει από την κατάσταση i, η διαδικασία μεταβαίνει στην κατάσταση j, με πιθανότητα p_{ij}, όπου τα p_{ij} ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$p_{ii} = 0 \text{ για όλα τα } i,$$

$$\sum_{j=0}^{M} p_{ij} = 1 \text{ για όλα τα } i.$$

3. Η επόμενη κατάσταση που επισκέπτεται η διαδικασία αφού μεταβεί έξω από την κατάσταση i είναι ανεξάρτητη από το χρόνο που έχει ξοδέψει στην κατάσταση i.

Οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην περιγραφή της Μαρκοβιανής διαδικασίας για μια αλυσίδα ασυνεχούς χρόνου. Ο ανάλογος ρόλος για μια αλυσίδα συνεχούς χρόνου παίζεται από την λεγόμενη ένταση της μετάβασης. Η *ένταση μετάβασης* ορίζεται ως εξής:

$$q_j = -\frac{d}{dt} p_{jj}(0) = \lim_{t \to 0} - \frac{p_{jj}(t) - p_{jj}(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1 - p_{jj}(t)}{t}, \text{ για } j = 0, 1, \ldots, M,$$

και

$$q_{ij} = \frac{d}{dt} p_{ij}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{p_{ij}(t) - p_{ij}(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = q_i p_{ij}, \text{ για όλα τα } i \neq j.$$

Η ποσότητα q_j ονομάζεται *ένταση διάβασης*, όταν η Μαρκοβιανή αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση j, και το q_{ij} ονομάζεται *ένταση μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j.*

Η ποσότητα p_{ij} έχει ήδη ορισθεί ως η πιθανότητα ότι η διαδικασία θα μεταβεί στην κατάσταση j μόλις εξέλθει από την κατάσταση i. Η ένταση διάβασης q_i είναι απλά το αντίστροφο της προσδοκώμενης τιμής της τυχαίας μεταβλητής με εκθετική κατανομή που αναπαριστάνει το χρόνο που απαιτείται ώστε η διαδικασία να μεταβεί έξω από την κατάσταση i. Δηλαδή το q_i είναι ο ρυθμός με τον οποίο η διαδικασία εξέρχεται από την κατάσταση i, όταν βρίσκεται στην κατάσταση i.

Έτσι, η διαδικασία, ξεκινώντας στην κατάσταση i, ξοδεύει κάποιο χρόνο σε αυτή την κατάσταση πριν μεταβεί σε μια διαφορετική κατάσταση. Ο χρόνος αυτός έχει εκθετική κατανομή με ρυθμό q_i. Η διαδικασία μετά προχωράει στην κατάσταση j με πιθανότητα $p_{ij} = q_{ij}/q_i$ και ξοδεύει κάποιο χρόνο σε αυτή την κατάσταση. Ο χρόνος αυτός έχει εκθετική κατανομή με ρυθμό q_j κοκ.

Τέλος, να σημειωθεί ότι η ένταση διάβασης και η ένταση μετάβασης συσχετίζονται αφού:

$$q_i = \sum_{j=0, j\neq i}^{M} q_{ij} \,.$$

Αυτά τα αποτελέσματα υποδηλώνουν ακόμα έναν τρόπο ορισμού μίας Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου.

Μια στοχαστική διαδικασία $\{X(t)\}$, όπου $t \geq 0$, που παίρνει τις τιμές 0, 1, 2, ..., M, είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου αν η διαδικασία, όταν βρίσκεται στην κατάσταση i, τείνει να μεταβεί σε μια από τις M εναλλακτικές καταστάσεις, και οι χρόνοι που απαιτούνται για να μεταβεί από την κατάσταση i σε κάθε πιθανή κατάσταση j (j = 0, 1, ..., M και $j \neq i$), που συμβολίζονται με τις τυχαίες μεταβλητές T_{ij}, έχουν εκθετικές κατανομές με μέσες τιμές ίσες με $1/q_{ij}$. Η συγκεκριμένη κατάσταση στην οποία η διαδικασία τελικά μεταβαίνει, που συμβολίζεται j^*, είναι η κατάσταση j της οποίας ο αντίστοιχος χρόνος T_{ij} είναι ο μικρότερος.

Μόλις η διαδικασία εισέλθει στην νέα κατάσταση j^*, ένα νέο σύνολο ανεξαρτήτων εκθετικών τυχαίων μεταβλητών χρησιμοποιείται με παρόμοιο τρόπο για να καθοριστεί όπου η αλυσίδα παραμένει στην κατάσταση j^* και η επόμενη κατάσταση που θα επισκεφτεί από την j^*. Τα q_{ij} είναι οι ρυθμοί μετάβασης που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Αν το T_{ij^*} είναι το ελάχιστο των T_{ij} ($j \neq i$), τότε δείχνεται εύκολα (βλέπε ενότητα 8.4 στο βιβλίο) ότι το T_{ij^*} έχει εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/q_i$ (όπου το q_i είναι η ένταση διάβασης που αναφέρθηκε παραπάνω) και όπως σημειώθηκε πρωτύτερα:

$$q_i = \sum_{j=0, j\neq i}^{M} q_{ij} \,.$$

Όπως τα πρότυπα ασυνεχούς χρόνου ικανοποιούν τις εξισώσεις Chapman - Kolmagorov, έτσι και η συνάρτηση πιθανοτήτων μετάβασης συνεχούς χρόνου ικανοποιούν αυτές τις εξισώσεις, δηλαδή για οποιαδήποτε καταστάσεις i και j και θετικούς αριθμούς t και υ $(0 \leq \upsilon \leq t)$,

$$p_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{M} p_{ik}(\upsilon) p_{kj}(t-\upsilon)$$

Ένα ζεύγος καταστάσεων i και j λέμε ότι επικοινωνεί αν υπάρχουν χρόνοι t_1 και t_2 τέτοιοι ώστε $p_{ij}(t_1) > 0$ και $p_{ji}(t_2) > 0$. Όλες οι καταστάσεις που επικοινωνούν λέμε ότι σχηματίζουν μια κλάση. Αν όλες οι καταστάσεις σε μια αλυσίδα σχηματίζουν μια μοναδική κλάση, δηλαδή μια ανάγωγη αλυσίδα (πράγμα το οποίο υποθέσουμε), τότε

$p_{ij}(t) > 0$, για όλα τα $t > 0$ και όλες τις καταστάσεις i και j.

Ακόμα, το όριο

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j$$

πάντα υπάρχει και είναι ανεξάρτητο της αρχικής κατάστασης, για $j = 0, 1, 2, ..., M$.

Οι οριακές πιθανότητες επίσης ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\pi_j q_j = \sum_{i=0, i\neq j}^{M} \pi_i q_{ij}$$

και

$$\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1,$$

που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βρεθούν οι τιμές των οριακών πιθανοτήτων.

Έχει ήδη σημειωθεί ότι το q_j είναι ο ρυθμός με τον οποίο η διαδικασία εξέρχεται από την κατάσταση j δεδομένου ότι βρίσκεται στην κατάσταση j, έτσι ώστε το $q_j\pi_j$ είναι απλά ο ρυθμός (μακροχρόνια) με τον οποίο η διαδικασία εξέρχεται από την κατάσταση j. Παρόμοια, το q_{ij} είναι ο ρυθμός μετάβασης στην κατάσταση j δεδομένου ότι η διαδικασία είναι στην κατάσταση i, έτσι ώστε το $\sum_{i\neq j}^{M} \pi_i q_{ij}$ είναι ο συνολικός ρυθμός μετάβασης στην κατάσταση j. Εφόσον ο μακροχρόνιος ρυθμός με τον οποίο η διαδικασία εξέρχεται από την κατάσταση j πρέπει να ισούται με τον μακροχρόνιο ρυθμό με τον οποίο η διαδικασία εισέρχεται στην κατάσταση j, για να είναι το σύστημα σταθερό, πρέπει να συμβαίνει το εξής:

$$\pi_j q_j = \sum_{i=0, i\neq j}^{M} \pi_i q_{ij}, \text{ για } j = 0, 1, \ldots, M,$$

που είναι η εξίσωση που δίνεται παραπάνω για να βρεθούν οι οριακές πιθανότητες και ονομάζεται *εξισώσεις ισορροπίας*.

Σαν παράδειγμα θεωρούμε το εξής πρόβλημα επισκευής το οποίο συζητείται εκτενέστερα στο κεφάλαιο 8 του βιβλίου ("Θεωρία Ουράς"). Σε ένα μηχανουργείο υπάρχουν δύο μηχανές που εξυπηρετούνται από έναν τεχνίτη επισκευής. Μια μηχανή που παθαίνει βλάβη αρχίζει να επισκευάζεται αμέσως από τον τεχνίτη εκτός αν αυτός επισκευάζει μια άλλη μηχανή οπότε η πρώτη μηχανή μπαίνει σε ουρά αναμονής. Ένα σύστημα λέμε ότι βρίσκεται στην κατάσταση n αν n μηχανές δεν λειτουργούν. Αν η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση n, όπου $1 \leq n \leq 2$, αυτή η κατάσταση σημαίνει ότι μια μηχανή επισκευάζεται και $(n - 1)$ μηχανές περιμένουν στην ουρά για να επισκευαστούν. Αν η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση 0, τότε όλες οι μηχανές λειτουργούν και ο τεχνίτης βρίσκεται σε αργία.

Έστω $X(t)$ ο αριθμός των μηχανών που δεν λειτουργούν στον χρόνο t.

Υποθέτουμε ότι ο χρόνος μέχρι να πάθει βλάβη μια μηχανή έχει εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/\lambda$ και ο χρόνος επισκευής για μια χαλασμένη μηχανή έχει εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/\mu$.

Η στοχαστική διαδικασία $\{X(t)\}$ είναι μια Μαρκοβιανή διαδικασία συνεχούς χρόνου με πιθανές καταστάσεις τις 0, 1, 2.

Οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης ενδιαφέρουν τον διαχειριστή του συστήματος.

Πριν λύσουμε τις εξισώσεις ισορροπίας, είναι σημαντικό να σημειώσουμε ορισμένα χαρακτηριστικά των q_{ij} για αυτό το πρότυπο. Η διαδικασία, μπορεί να μετακινηθεί από την μία κατάσταση μόνον σε μια διπλανή κατάσταση. Για παράδειγμα, όταν βρίσκεται στην κατάσταση 1 (μια μηχανή έχει βλάβη), μπορεί να μετακινηθεί είτε στην κατάσταση 0 (καμία μηχανή δεν έχει βλάβη) είτε στην κατάσταση 2 (δύο μηχανές έχουν βλάβη). Με άλλα λόγια, $q_{ij} = 0$, όποτε $|i-j| \geq 2$. Οι εξισώσεις ισορροπίας γίνονται:

$$\pi_0 q_0 = \pi_1 q_{10}$$

$$\pi_1 q_1 = \pi_0 q_{01} + \pi_2 q_{21}$$

$$\pi_2 q_2 = \pi_1 q_{12.}$$

Η λύση αυτών των εξισώσεων είναι:

$$\pi_1 = \pi_0 \frac{q_0}{q_{10}}, \quad \pi_2 = \pi_0 \frac{q_0}{q_{10}} \frac{q_{12}}{q_2}$$

Σημειώνοντας ότι $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$, βρίσκουμε ότι

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + (q_0/q_{10}) + (q_0/q_{10})(q_{12}/q_2)}$$

Οι τιμές των q_0, q_2, q_{10} και q_{12} βρίσκονται από το πρότυπο ως συνάρτηση των μ και λ. Για να βρεθούν αυτές οι τιμές, χρησιμοποιείται το παρακάτω γενικό αποτέλεσμα (βλέπε ενότητα 8.4 στο βιβλίο). Αν τα T_1, T_2, …, T_k είναι k ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που έχουν εκθετικές κατανομές με ρυθμούς υ_1, υ_2, …, υ_k, αντίστοιχα, τότε η τυχαία μεταβλητή z, που ορίζεται ως η ελάχιστη αυτών των k τυχαίων μεταβλητών, έχει επίσης εκθετική κατανομή με ρυθμό $\upsilon_1 + \upsilon_2 + \ldots + \upsilon_k$.

Επιστρέφοντας στο παράδειγμα, το q_0 είναι ο ρυθμός με τον οποίο η διαδικασία εξέρχεται από την κατάσταση 0 (όλες οι μηχανές λειτουργούν) όταν η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση 0. Εφόσον υπάρχουν δύο μηχανές που λειτουργούν και κάθε μια παθαίνει βλάβη σύμφωνα με μια εκθετική κατανομή με ρυθμό λ, η διαδικασία εξέρχεται από την κατάσταση 0 όταν η πρώτη μηχανή χαλάσει, δηλαδή όταν πραγματοποιηθεί ο ελάχιστος από τους δύο χρόνους βλάβης. Έτσι:

$$q_0 = \lambda + \lambda = 2\lambda.$$

Παρόμοια, το q_2 είναι ο ρυθμός με τον οποίο η διαδικασία εξέρχεται από την κατάσταση 2 (και οι δύο μηχανές είναι σε βλάβη) όταν βρίσκεται στην κατάσταση 2. Όταν και οι δύο μηχανές είναι σε βλάβη, τότε μια επισκευάζεται από τον τεχνίτη, έτσι ώστε η διαδικασία εξέρχεται από την κατάσταση 2 όταν η μηχανή επισκευαστεί. Έτσι ο ρυθμός που η διαδικασία εξέρχεται από την κατάσταση 2 είναι:

$$q_2 = \mu.$$

Ο ρυθμός q_{10} είναι ο ρυθμός μετάβασης στην κατάσταση 0 (και οι δύο μηχανές λειτουργούν) όταν η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση 1 (μια μηχανή σε βλάβη). Ο ρυθμός που συμβαίνει αυτό είναι ο ρυθμός επισκευής της μηχανής, δηλαδή

$$q_{10} = \mu.$$

Παρόμοια, το q_{12} είναι ο ρυθμός μετάβασης στην κατάσταση 2 (και οι δύο μηχανές είναι σε βλάβη) όταν η διαδικασία είναι στην κατάσταση 1 (μια μηχανή σε βλάβη). Ο ρυθμός που συμβαίνει αυτό είναι ο ρυθμός με τον οποίο χαλάει μια μηχανή, δηλαδή

$$q_{12} = \lambda.$$

Αν και στο παράδειγμα δεν είναι υποχρεωτικό να υπολογίσουμε το q_1 για να βρούμε τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης, είναι διδακτικό να το κάνουμε. Ο ρυθμός q_1 είναι ο ρυθμός με τον οποίο η διαδικασία εξέρχεται από την κατάσταση 1. Η διαδικασία εξέρχεται από την κατάσταση 1 (μια μηχανή λειτουργεί και μια μηχανή σε βλάβη) όταν είτε η μηχανή που λειτουργεί χαλάσει, είτε η μηχανή που είναι σε βλάβη επισκευαστεί, δηλαδή στον ελάχιστο των χρόνων μέχρι να χαλάσει η μηχανή που λειτουργεί και μέχρι να επισκευαστεί η μηχανή που είναι σε βλάβη. Έτσι το q_1 δίνεται από το

$$q_1 = \lambda + \mu .$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα για τα q_0, q_2, q_{10} και q_{12} έχουμε :

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + 2\lambda / \mu + 2(\lambda / \mu)^2}$$

$$\pi_1 = \frac{\pi_0 2\lambda}{\mu}$$

$$\pi_2 = \pi_0 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 .$$

2. Θεωρία Ουράς

Στο κεφάλαιο αυτό κάνουμε μια συνοπτική παρουσίαση του κεφαλαίου 8 του βιβλίου Hillier, F.S., Lieberman, G.J. Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Τόμος Α’, Τεύχος Γ’, Εκδόσεις Παπαζήση, 1985.

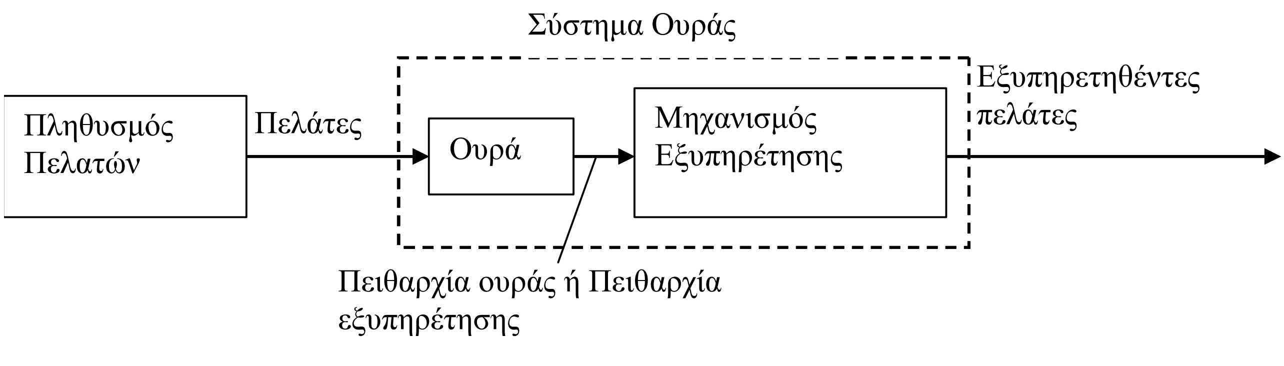
- *Ουρές* ή *Γραμμές Αναμονής*: Φαινόμενο που δημιουργείται όταν η τρέχουσα ζήτηση για μία εξυπηρέτηση είναι μεγαλύτερη από την τρέχουσα ικανότητα εξυπηρέτησης του συστήματος
- *Αντικειμενικός σκοπός του προβλήματος της ουράς*: Να βρεθεί μια οικονομική ισορροπία μεταξύ του κόστους εξυπηρέτησης και του κόστους αναμονής στην ουρά
- *Θεωρία ουράς*:
    1. Δίνει την πληροφόρηση που χρειάζεται για μια τέτοια απόφαση με το να προσδιορίζει τα διάφορα χαρακτηριστικά του συστήματος
    2. Παρέχει ένα μεγάλο αριθμό μαθηματικών προτύπων για την περιγραφή των καταστάσεων των γραμμών αναμονής

2.1 Πρότυπο Παράδειγμα

Στα εξωτερικά ιατρεία ενός νοσοκομείου υπάρχει πάντα ένας γιατρός σε υπηρεσία. Επειδή τελευταία υπάρχει αυξανόμενη τάση ασθενών να πηγαίνουν τα έκτακτα περιστατικά στα εξωτερικά ιατρεία, εξετάζεται η περίπτωση να εκχωρηθεί ένας δεύτερος γιατρός κατά τη διάρκεια των περιόδων αιχμής. Ο ερευνητής που αναλαμβάνει την εξέταση του προβλήματος εφαρμόζει εναλλακτικά πρότυπα της θεωρίας ουράς για να προσδιορίσει τα χαρακτηριστικά του συστήματος με έναν και με δύο γιατρούς.

2.2 Η Βασική Δομή των Προτύπων Ουράς

Η Βασική Διαδικασία Ουράς



Πληθυσμός Πελατών

- *μέγεθος*: ο συνολικός αριθμός πελατών
    1. *άπειρος*: ο ρυθμός αφίξεων δεν επηρεάζεται από τον αριθμό των πελατών στο σύστημα
    2. *περιορισμένος*: ο ρυθμός αφίξεων επηρεάζεται από τον αριθμό των πελατών στο σύστημα
- κατανομή *χρόνου μεταξύ διαδοχικών αφίξεων*: π.χ. εκθετική
- συμπεριφορά πελατών: π.χ. μη προσχώρηση πελατών στο σύστημα επειδή η ουρά είναι μεγάλη

Ουρά

- μέγιστος επιτρεπτός αριθμός πελατών
    1. *άπειρο* μήκος
    2. *περιορισμένο* μήκος

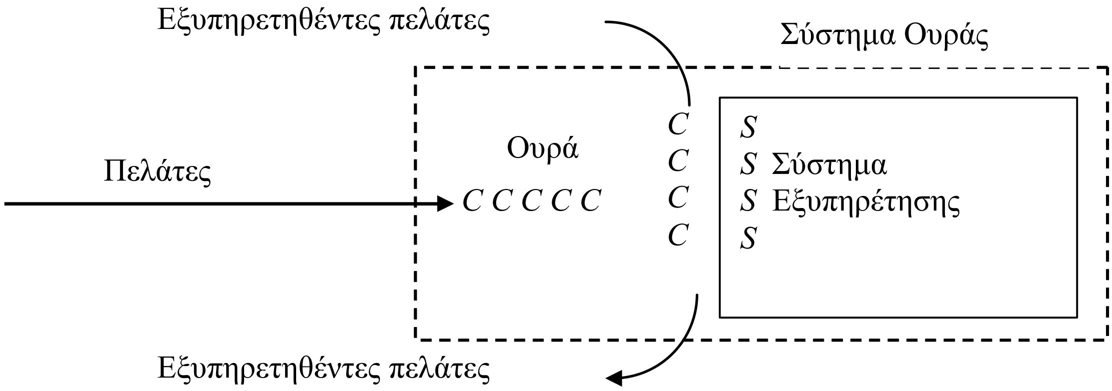
Πειθαρχία Ουράς

- προτεραιότητα με την οποία επιλέγονται οι πελάτες στην ουρά: π.χ. εξυπηρέτηση σύμφωνα με τη σειρά άφιξης (FIFO), κατά τυχαίο τρόπο, σύμφωνα με συγκεκριμένη προτεραιότητα

Μηχανισμός Εξυπηρέτησης

- ένα ή περισσότερα *συστήματα εξυπηρέτησης*: ο πελάτης μπορεί να πρέπει να εξυπηρετηθεί σε μια ακολουθία συστημάτων εξυπηρέτησης
- κάθε σύστημα εξυπηρέτησης έχει μία ή περισσότερες παράλληλες *θέσεις εξυπηρέτησης*
- κατανομή *χρόνου εξυπηρέτησης* για κάθε θέση: π.χ. εκθετική, εκφυλισμένη (σταθερή), Erlang

Μια Στοιχειώδης Διαδικασία Ουράς



Πολλά πρότυπα ουράς υποθέτουν ότι όλοι οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων είναι ανεξάρτητοι και έχουν την ίδια κατανομή και ότι όλοι οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητοι και έχουν την ίδια κατανομή. Τέτοια πρότυπα συμβολίζονται κατά Kendall με τη χρήση τεσσάρων παραμέτρων ως εξής:

$$A/E/\theta/\pi,$$

όπου,

- A: Κατανομή χρόνων μεταξύ διαδοχικών αφίξεων (περιγράφεται με ένα από τα παρακάτω σύμβολα)
- E: Κατανομή χρόνων εξυπηρέτησης (περιγράφεται με ένα από τα παρακάτω σύμβολα)
- θ: Αριθμός θέσεων εργασίας (φυσικός ακέραιος αριθμός – μπορεί να είναι και ∞)
- π: μέγιστος δυνατός αριθμός πελατών στο σύστημα (φυσικός ακέραιος αριθμός – αν δεν υπάρχει θεωρείται ότι είναι ίσος με ∞)

Τα σύμβολα μερικών γνωστών κατανομών έχουν ως εξής:

- M : εκθετική κατανομή (Μαρκοβιανή)
- D : εκφυλισμένη κατανομή (σταθεροί χρόνοι)

- E_k : κατανομή Erlang με k φάσεις
- G : γενική κατανομή (οποιαδήποτε κατανομή επιτρέπεται)

Π.χ. με «*M/M/s*» συμβολίζουμε ένα πρότυπο ουράς με εκθετικά κατανεμημένους χρόνους μεταξύ διαδοχικών αφίξεων, εκθετικά κατανεμημένους χρόνους εξυπηρέτησης, s θέσεις εξυπηρέτησης, και κανένα περιορισμό στο μέγιστο δυνατό αριθμό πελατών στο σύστημα (ή ο μέγιστος δυνατός αριθμός των πελατών στο σύστημα είναι άπειρος).

Συμβολισμός και Ορολογία

- Κατάσταση συστήματος: ο αριθμός των πελατών στο σύστημα
- Μήκος ουράς: ο αριθμός των πελατών που περιμένουν εξυπηρέτηση
- $N(t)$: ο αριθμός των πελατών στο σύστημα ουράς στο χρόνο t ($t \geq 0$)
- $P_n(t)$: η πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα ουράς στο χρόνο t
- s: ο αριθμός των θέσεων εξυπηρέτησης στο σύστημα ουράς
- λ_n: ο μέσος ρυθμός αφίξεων (στη μονάδα του χρόνου) των νέων πελατών, όταν υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα
- μ_n: ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης ολόκληρου του συστήματος (στη μονάδα του χρόνου) όταν υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα
- λ, μ, ρ: βλέπε παρακάτω
- όταν λ_n σταθερή για όλα τα $n \Rightarrow$ *συμβολίζεται με* $\lambda \Rightarrow \lambda_n = \lambda$
- όταν ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης ανά απασχολούμενη θέση είναι σταθερή για όλα τα n $\Rightarrow$ συμβολίζεται με $\mu \Rightarrow \mu_n = s\mu$, όταν $n \geq s$
- $1/\lambda$: ο μέσος χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων
- $1/\mu$: ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης
- $\rho = \lambda/s\mu$: ο *βαθμός απασχόλησης* του συστήματος εξυπηρέτησης, δηλαδή το μέσο ποσοστό του χρόνου που είναι απασχολημένες οι θέσεις εξυπηρέτησης
- *μεταβατική κατάσταση*: η κατάσταση του συστήματος επηρεάζεται από την αρχική κατάσταση και το χρόνο που έχει παρέλθει από την έναρξη λειτουργίας του συστήματος
- *μόνιμη κατάσταση*: η κατάσταση του συστήματος είναι ανεξάρτητη από την αρχική κατάσταση και το χρόνο που έχει παρέλθει από την έναρξη λειτουργίας του συστήματος

Συμβολισμός για τη μόνιμη κατάσταση

- N: ο αριθμός των πελατών στο σύστημα ουράς
- P_n: η πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα ουράς
- L: ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα
- L_q: ο μέσος αριθμός πελατών στην ουρά
- $\mathcal{W}$: ο χρόνος αναμονής ενός πελάτη στο σύστημα (περιλαμβάνει και το χρόνο εξυπηρέτησης
- W: $E(\mathcal{W})$
- $\mathcal{W}_q$: ο χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά (δεν περιλαμβάνει το χρόνο εξυπηρέτησης)
- $W_q = E(\mathcal{W}_q)$

Σχέσεις μεταξύ L, W, L_q και W_q

Αν $\lambda_n = \lambda$ για όλα τα $n \Rightarrow$ $L = \lambda W$ (**ο τύπος του Little**)

$L_q = \lambda W_q$

Αν τα λ_n δεν είναι ίσα $\Rightarrow$ το λ μπορεί να αντικατασταθεί από το μέσο ρυθμό αφίξεων $\overline{\lambda}$

Αν $\mu_n = \mu$ για όλα τα $n \Rightarrow$ $W = W_q + \dfrac{1}{\mu}$

Παραδείγματα Πραγματικών Συστημάτων Ουράς

- *Εμπορικά συστήματα εξυπηρέτησης*: π.χ. ταμείο σε μία τράπεζα ή ένα σουπερμάρκετ, επισκευή οικιακών συσκευών, αυτόματοι πωλητές, κτλ.
- *Μεταφορικά συστήματα εξυπηρέτησης*: π.χ. διόδια, φωτεινοί σηματοδότες τροχαίας, αποβάθρες σε λιμάνια, διάδρομος προσγείωσης / απογείωσης σε αεροδρόμιο, ταξί, πυροσβεστικά οχήματα, ασανσέρ, κτλ.
- *Εμποροβιομηχανικά συστήματα εσωτερικής εξυπηρέτησης*: π.χ. συστήματα διακίνησης υλικών, συστήματα συντήρησης, σταθμοί επιθεώρησης, συστήματα ηλεκτρονικών υπολογιστών, κτλ.
- *Κοινωνικά συστήματα εξυπηρέτησης*: π.χ. δικαστικό σύστημα, νομοθετικό σύστημα, συστήματα υγείας (π.χ. εξωτερικά ιατρεία, νοσοκομειακά αυτοκίνητα, ακτινολογικά μηχανήματα, κρεβάτια νοσοκομείου), κοινωνικές εξυπηρετήσεις (π.χ. εξασφάλιση στέγης), κτλ.
- *Πολλά άλλα συστήματα εξυπηρέτησης*: π.χ. τηλεπικοινωνιακά συστήματα, προσωπικές ουρές (π.χ. δουλειές που πρέπει να γίνουν), κτλ.

2.3 Ο Ρόλος της Εκθετικής Κατανομής

Μία τυχαία μεταβλητή T ακολουθεί μιαν *εκθετική κατανομή με παράμετρο α*, αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς της είναι

$$f_T(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t}, & \text{για } t \geq 0 \\ 0, & \text{για } t < 0 \end{cases}$$

Οι αθροιστικές πιθανότητες είναι

$$P\{T \leq t\} = 1 - e^{-\alpha t} \text{ και } P\{T > t\} = e^{-\alpha t} \text{ για } t \geq 0$$

Η προσδοκώμενη τιμή και η διακύμανση είναι

$$E(T) = \frac{1}{\alpha} \text{ και } \operatorname{var}(T) = \frac{1}{\alpha^2}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 1. Η $f_T(t)$ είναι μία αυστηρά φθίνουσα συνάρτηση του t ($t \geq 0$):

$$P\{0 \leq T \leq \Delta t\} > P\{t \leq T \leq t + \Delta t\} \text{ για } t > 0 \text{ και } \Delta t > 0$$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 2. Έλλειψη μνήμης:

$$P\{T \geq t + \Delta t \mid T > \Delta t\} = P\{T > t\}$$

Απόδειξη:

$$P\{T \geq t + \Delta t \mid T > \Delta t\} = \frac{P\{T > \Delta t, T > t + \Delta t\}}{P\{T > \Delta t\}} = \frac{P\{T > t + \Delta t\}}{P\{T > \Delta t\}}$$

$$= \frac{e^{-\alpha(t+\Delta t)}}{e^{-\alpha \Delta t}} = e^{-\alpha t} = P\{T > t\}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 3. Το ελάχιστο διαφορετικών ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, που ακολουθούν μια εκθετική κατανομή, ακολουθεί μια εκθετική κατανομή.

Απόδειξη: Έστω T_1, T_2, …, T_n *ανεξάρτητες* τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν μια εκθετική κατανομή με παραμέτρους α_1, α_2, …, α_n, αντίστοιχα. Έστω ακόμα $U = \min\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$.

$$P\{U > t\} = P\{T_1 > t, T_2 > t, \ldots, T_n > t\} = P\{T_1 > t\} P\{T_2 > t\} \cdots P\{T_n > t\}$$

$$= e^{-\alpha_1 t} e^{-\alpha_2 t} \cdots e^{-\alpha_n t} = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i t\right\}$$

Δηλαδή το U ακολουθεί μιαν εκθετική κατανομή με παράμετρο $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Παραδείγματα εφαρμογής στην θεωρία ουράς:

- Αν υπάρχουν n διαφορετικά είδη πελατών, και οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων για κάθε είδος ακολουθούν μια εκθετική κατανομή με παράμετρο α_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), τότε:
  1. με βάση την ΙΔΙΟΤΗΤΑ 2, σε οποιαδήποτε στιγμή, ο υπόλοιπος χρόνος μέχρι την άφιξη του *επόμενου* πελάτη του είδους i ακολουθεί μιαν εκθετική κατανομή με την ίδια παράμετρο α_i, και
  2. με βάση την ΙΔΙΟΤΗΤΑ 3, ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων για ολόκληρο το σύστημα ακολουθεί μιαν εκθετική κατανομή με παράμετρο $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.
- Αν υπάρχουν n θέσεις εξυπηρέτησης και όλες οι θέσεις έχουν την ίδια εκθετική κατανομή χρόνου εξυπηρέτησης με παράμετρο μ, τότε με βάση τις ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ 2 και 3, σε οποιαδήποτε στιγμή, ο χρόνος μέχρι να τελειώσει η *επόμενη* εξυπηρέτηση σε οποιαδήποτε από τις θέσεις ακολουθεί μιαν εκθετική κατανομή με παράμετρο $\alpha = n\mu$.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 4. (Σχέση με την κατανομή Poisson) Έστω ότι ο *χρόνος μεταξύ διαδοχικών εμφανίσεων ενός περιστατικού* (άφιξη ή περάτωση εξυπηρέτησης) έχει μιαν εκθετική κατανομή με παράμετρο α. Τότε ο *αριθμός των εμφανίσεων του περιστατικού* στο χρόνο t ($t > 0$), $X(t)$, ακολουθεί μια κατανομή Poisson με παράμετρο αt, δηλαδή

$$P\{X(t) = n\} = \frac{(\alpha t)^n e^{-\alpha t}}{n!}, \text{ για } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Η προσδοκώμενη τιμή της κατανομής Poisson είναι

$$E\{X(t)\} = \alpha t$$

Έτσι, το α είναι ο μέσος αριθμός των περιστατικών στη μονάδα του χρόνου, δηλαδή, ο μέσος ρυθμός με τον οποίο συμβαίνουν τα περιστατικά.

Παραδείγματα εφαρμογής στην θεωρία ουράς:

- Αν οι *χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων* ακολουθούν μια εκθετική κατανομή με παράμετρο λ, τότε ο *αριθμός των αφίξεων* στο χρόνο t ακολουθεί μια κατανομή Poisson όπου $\alpha = \lambda$, και λέμε ότι οι αφίξεις γίνονται με μια *διαδικασία εισροής Poisson*.

- Αν υπάρχουν n παράλληλες θέσεις εξυπηρέτησης και οι *χρόνοι εξυπηρέτησης* κάθε θέσης ακολουθούν μιαν εκθετική κατανομή με παράμετρο μ, τότε ο αριθμός των εξυπηρετήσεων που γίνονται από n συνεχώς απασχολημένες θέσεις στο χρόνο t ακολουθεί μια κατανομή Poisson όπου $\alpha = n\mu$.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5. Για όλες τις θετικές τιμές του t, $P\{T \le t + \Delta t \mid T > t\} \approx \alpha \Delta t$ για μικρό Δt.

Απόδειξη:

$$P\{T \le t + \Delta t \mid T > t\} = P\{T \le \Delta t\} = 1 - e^{-\alpha \Delta t} = 1 - 1 + \alpha \Delta t - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-\alpha \Delta t)^n}{n!} \approx \alpha \Delta t \text{ για μικρό } \Delta t,$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η ισοδυναμία $e^x = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

<u>Παράδειγμα εφαρμογής στην θεωρία ουράς:</u>

Αν ο χρόνος διαδοχικών περιστατικών (αφίξεων ή ο περατώσεων εξυπηρέτησης) ακολουθεί μιαν εκθετική κατανομή με παράμετρο α, τότε η πιθανότητα ότι το περιστατικό θα συμβεί στο επόμενο μικρό διάστημα Δt είναι $\alpha\ \Delta t$.

Δηλαδή, σε κάθε χρονική περίοδο σταθερής διάρκειας υπάρχει η ίδια πιθανότητα να συμβεί ένα περιστατικό, άσχετα από το πότε έγινε το προηγούμενο περιστατικό.

2.4 Η Διαδικασία Γεννήσεων – Θανάτων

Στα πλαίσια της θεωρίας ουράς, Γέννηση = άφιξη ενός πελάτη

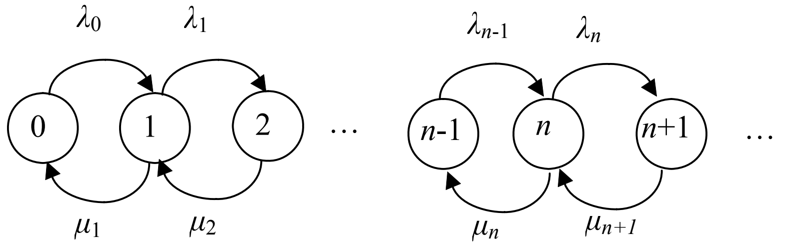
Θάνατος = αναχώρηση ενός πελάτη

$N(t)$: η κατάσταση του συστήματος (ο αριθμός των πελατών στο σύστημα) στο χρόνο t ($t > 0$)

ΥΠΟΘΕΣΗ 1. Αν $N(t) = n$, η τρέχουσα κατανομή πιθανότητας του *υπόλοιπου* χρόνου μέχρι την επόμενη *γέννηση* (άφιξη) είναι εκθετική με παράμετρο λ_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

ΥΠΟΘΕΣΗ 2. Αν $N(t) = n$, η τρέχουσα κατανομή πιθανότητας του *υπόλοιπου* χρόνου μέχρι τον επόμενο *θάνατο* (περάτωση εξυπηρέτησης) είναι εκθετική με παράμετρο μ_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

ΥΠΟΘΕΣΗ 3. Κάθε φορά μπορεί να συμβεί μόνο *μία* γέννηση ή *ένας* θάνατος.



Διάγραμμα ρυθμού διαδικασίας γεννήσεων – θανάτων

Η ανάλυση της διαδικασίας γεννήσεων - θανάτων είναι πολύ δύσκολη όταν το σύστημα βρίσκεται σε *μεταβατική* κατάσταση. Υπάρχουν ορισμένα αποτελέσματα για την κατανομή της πιθανότητας του $N(t)$, αλλά είναι πολύπλοκα για να έχουν πρακτική χρησιμότητα.

Είναι σχετικά απλό να προσδιορισθεί αυτή η κατανομή όταν το σύστημα έχει φτάσει σε *μόνιμη* κατάσταση λειτουργίας.

ΑΡΧΗ: ΡΥΘΜΟΣ ΕΙΣΟΔΟΥ = ΡΥΘΜΟΣ ΕΞΟΔΟΥ: Για κάθε κατάσταση του συστήματος n ($n = 0, 1, 2, \ldots$), ο μέσος ρυθμός (προσδοκώμενος αριθμός εμφανίσεων στη μονάδα του χρόνου) με τον οποίο συμβαίνουν τα *περιστατικά εισροής*, πρέπει να είναι ίσος με το μέσο ρυθμό με τον οποίο συμβαίνουν τα *περιστατικά εκροής*.

εξισώσεις ισορροπίας διαδικασίας γεννήσεων - θανάτων

Κατάσταση	Ρυθμός εισόδου = Ρυθμός εξόδου
0	$\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0$
1	$\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 = (\lambda_1 + \mu_1)P_1$
2	$\lambda_1 P_1 + \mu_3 P_3 = (\lambda_2 + \mu_2)P_2$
$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$\lambda_{n-2}P_{n-2} + \mu_n P_n = (\lambda_{n-1} + \mu_{n-1})P_{n-1}$
n	$\lambda_{n-1}P_{n-1} + \mu_{n+1}P_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n)P_n$
$\vdots$	$\vdots$

<u>Πιθανότητα μόνιμης κατάστασης</u>

0 $\quad P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}P_0$

1 $\quad P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2}P_1 + \frac{1}{\mu_2}(\mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0) = \frac{\lambda_1}{\mu_2}P_1 = \frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu_2\mu_1}P_0$

2 $\quad P_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3}P_2 + \frac{1}{\mu_3}(\mu_2 P_2 - \lambda_1 P_1) = \frac{\lambda_2}{\mu_3}P_2 = \frac{\lambda_2\lambda_1\lambda_0}{\mu_3\mu_2\mu_1}P_0$

$\vdots \quad \vdots$

n–1 $\quad P_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}P_{n-1} + \frac{1}{\mu_n}(\mu_{n-1}P_{n-1} - \lambda_{n-2}P_{n-2}) = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}P_{n-1} = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1}P_0$

n $\quad P_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}P_n + \frac{1}{\mu_{n+1}}(\mu_n P_n - \lambda_{n-1}P_{n-1}) = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}P_n = \frac{\lambda_n\lambda_{n-1}\cdots\lambda_0}{\mu_{n+1}\mu_n\cdots\mu_1}P_0$

$\vdots \quad \vdots$

$$C_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1} \text{ για } n = 1, 2, \ldots$$

$$P_n = C_n P_0 \text{ για } n = 1, 2, \ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \Rightarrow \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\right]P_0 = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n}$$

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n$$

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s)P_n$$

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}}, W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}$$

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα βασίζονται στην υπόθεση ότι τα λ_n και μ_n είναι τέτοια ώστε να μπορεί η διαδικασία να φτάσει σε μόνιμη κατάσταση λειτουργίας. Αυτό ισχύει αν

- $\lambda_n = 0$ για κάποια n, έτσι ώστε μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός καταστάσεων να είναι δυνατές
- $\lambda_n = \lambda$ και $\mu_n = s\mu$ και $\rho = \lambda/s\mu < 1$

Δεν ισχύει αν

- $\sum_{n=1}^{\infty} C_n = \infty$

2.5 Πρότυπα Ουράς της Διαδικασίας Γεννήσεων-Θανάτων

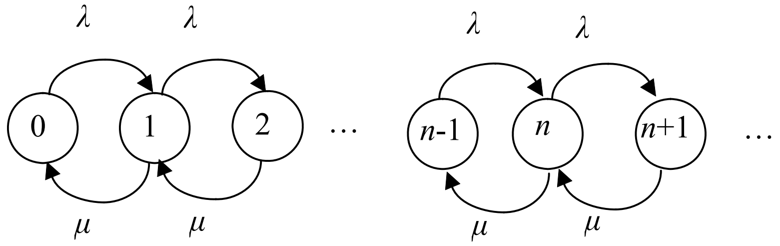
Το Βασικό Πρότυπο *M/M*/1 (Σταθερός Ρυθμός Αφίξεων και Εξυπηρέτησης)

Σταθερός *μέσος ρυθμός αφίξεων* λ

Σταθερός *μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης* μ

(α) Μία θέση ($s = 1$) $\lambda_n = \lambda$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

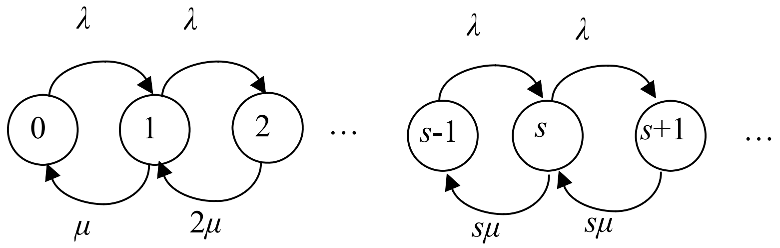
$\mu_n = \mu$, $n = 1, 2, \ldots$



Διάγραμμα ρυθμών για το βασικό πρότυπο ($s = 1$)

(β) Παράλληλες θέσεις ($s > 1$) $\lambda_n = \lambda$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & n = 1, 2, \ldots, s \\ s\mu, & n = s, s+1, \ldots \end{cases}$$



Διάγραμμα ρυθμών για το βασικό πρότυπο ($s > 1$)

Το σύστημα ουράς θα φτάσει σε μόνιμη κατάσταση λειτουργίας όταν $\rho = \dfrac{\lambda}{s\mu} < 1$.

<u>Αποτελέσματα για μία θέση εξυπηρέτησης ($s = 1$)</u>

$$C_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, n = 1, 2, \ldots$$

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\right)^{-1} = \left(\frac{1}{1-\rho}\right)^{-1} = 1-\rho.$$

$$P_n = \rho^n P_0 = (1-\rho)\rho^n \text{ , } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = (1-\rho)\rho\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{d\rho}(\rho^n) = (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\right) = (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$$
$$= \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n = L-(1-P_0) = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}.$$

Έστω T_1, T_2, … ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές του χρόνου εξυπηρέτησης που έχουν μιαν εκθετική κατανομή με παράμετρο μ. Ο υπό συνθήκη χρόνος αναμονής όταν υπάρχουν n πελάτες ήδη στο σύστημα είναι

$$S_{n+1} = T_1 + T_2 + \cdots + T_{n+1}\text{, } n = 0, 1, 2, \ldots \text{ (κατανομή Erlang)}$$

$$P\{\mathcal{W} > t\} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n P\left\{S_{n+1} > t\right\} = e^{-\mu(1-\rho)t},\ \ t \ge 0.$$

Το $\mathcal{W}$ ακολουθεί μιαν εκθετική κατανομή με παράμετρο $\mu(1-\rho)$. Έτσι

$$W = E(\mathcal{W}) = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}.$$

$$P\left\{\mathcal{W}_q = 0\right\} = P_0 = 1-\rho.$$

$$P\{\mathcal{W}_q > t\} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n P\left\{S_n > t\right\} = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\rho)\rho^n P\left\{S_n > t\right\}$$
$$= \rho\sum_{n=0}^{\infty} P_n P\left\{S_{n+1} > t\right\} = \rho P\{\mathcal{W} > t\} = \rho e^{-\mu(1-\rho)t},\ \ t \ge 0.$$

$$W_q = E(\mathcal{W}_q) = W - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}.$$

<u>Αποτελέσματα για παράλληλες θέση εξυπηρέτησης </u>($s > 1$)

$$C_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!},\ n = 1, 2, \ldots, s$$

$$C_n = \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} = \frac{(\lambda/\mu)^n}{s!s^{n-s}},\ n = s, s+1, \ldots.$$

$$P_0 = 1\Big/\left[\sum_{n=0}^{s-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\sum_{n=s}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s}\right]$$
$$= 1\Big/\left[\sum_{n=0}^{s-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\frac{1}{1-(\lambda/s\mu)}\right]$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0, & n = 0, 1, \ldots, s \\ \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{s!\, s^{n-s}} P_0, & n = s, s+1, \ldots \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας $\rho = \dfrac{\lambda}{s\mu}$,

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) P_n = \sum_{j=0}^{\infty} j P_{s+j} = \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \rho^j P_0 \\ &= P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \rho \frac{d}{d\rho}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \right) = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \rho \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho} \right) \\ &= \frac{P_0 (\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2}. \end{aligned}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}.$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}.$$

$$L = \lambda\left(W_q + \frac{1}{\mu} \right) = L_q + \frac{\lambda}{\mu}.$$

$$P\{\mathcal{W} > t\} = e^{-\mu t}\left[1 + \frac{P_0 (\lambda/\mu)^s}{s!(1-\rho)} \left(\frac{1 - e^{-\mu t(s-1-\lambda/\mu)}}{s-1-\lambda/\mu} \right) \right].$$

$$P\left\{ \mathcal{W}_q > t \right\} = \left[1 - P\left\{ \mathcal{W}_q = 0 \right\} \right] e^{-s\mu(1-\rho)t}, \text{ όπου } P\left\{ \mathcal{W}_q = 0 \right\} = \sum_{n=0}^{s-1} P_n.$$

<u>Παράδειγμα</u>

Εξωτερικά Ιατρεία: $\lambda = 2$ πελάτες / ώρα, $\mu = 3$ πελάτες / ώρα, $s = 1, 2$.

Αποτελέσματα

	$s = 1$	$s = 2$
ρ	2/3	½
P_0	1/3	½
P_1	2/9	1/3
P_n, $n \geq 2$	$1/3(2/3)^n$	$(1/3)^n$
L_q	4/3	1/12
L	2	¾
W_q	2/3	1/24
W	1	3/8
$P\{\mathcal{W}_q > 0\}$	0,667	0,167
$P\{\mathcal{W}_q > ½\}$	0,404	0,022
$P\{\mathcal{W}_q > 1\}$	0,245	0,003
$P\{\mathcal{W}_q > t\}$	$(2/3)e^{-t}$	$(1/6)e^{-4t}$
$P\{\mathcal{W} > t\}$	e^{-t}	$(1/2)e^{-3t}(3 - e^{-t})$

Το Βασικό Πρότυπο με Ουρά Περιορισμένου Μήκους *M/M/s/M*

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & n = 0,1,\ldots,M-1 \\ 0, & n \geq M. \end{cases}$$

Αποτελέσματα για μία θέση εξυπηρέτησης ($s = 1$)

$$C_n = \begin{cases} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n = \rho^n, & n = 1,2,\ldots,M \\ 0, & n > M. \end{cases}$$

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{M}\rho^n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{M}\rho^n} = 1\Bigg/\left[\frac{1-\rho^{M+1}}{1-\rho}\right] = \frac{1-\rho}{1-\rho^{M+1}}.$$

$$P_n = \rho^n P_0 = \left(\frac{1-\rho}{1-\rho^{M+1}}\right)\rho^n, \ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ M.$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{M+1}}\,\rho\sum_{n=0}^{M}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^n\right) = \frac{1-\rho}{1-\rho^{M+1}}\,\rho\frac{d}{d\rho}\left(\sum_{n=0}^{M}\rho^n\right)$$

$$= \frac{1-\rho}{1-\rho^{M+1}}\,\rho\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1-\rho^{M+1}}{1-\rho}\right) = \cdots = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(M+1)\rho^{M+1}}{1-\rho^{M+1}}.$$

$$L_q = L - (1-P_0).$$

Στα παραπάνω αποτελέσματα δεν απαιτείται να ισχύει $\rho = \lambda / \mu < 1$.

Για την κατανομή του χρόνου αναμονής στο σύστημα και στην ουρά χρειάζονται υπολογισμοί στον ηλεκτρονικό υπολογιστή. Οι μέσοι χρόνοι αναμονής όμως βρίσκονται εύκολα από τις σχέσεις

$$W = E(\mathcal{W}) = \frac{L}{\bar{\lambda}},\ W_q = E(\mathcal{W}_q) = \frac{L_q}{\bar{\lambda}},$$

όπου,

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n P_n = \sum_{n=0}^{M-1}\lambda P_n = \lambda\left(1-P_M\right).$$

Αποτελέσματα για παράλληλες θέση εξυπηρέτησης ($s > 1$)

Υπόθεση: $s \leq M$.

$$C_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!},\ n = 1,\ 2,\ \ldots,\ s,$$

$$C_n = \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} = \frac{(\lambda/\mu)^n}{s!s^{n-s}},\ n = s,\ s+1,\ \ldots,\ M,$$

$$C_n = 0,\ \text{για}\ n > M.$$

$$P_0 = 1\Bigg/\left[1+\sum_{n=1}^{s}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\sum_{n=s+1}^{M}\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s}\right].$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0, & n = 0,1,\ldots,s, \\ \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{s!s^{n-s}} P_0, & n = s, s+1,\ldots,M, \\ 0, & n > M. \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας $\rho = \dfrac{\lambda}{s\mu}$, έχουμε

$$L_q = \frac{P_0(\lambda/\mu)^n \rho}{s!(1-\rho)^2}\left[1-\rho^{M-s} - (M-s)\rho^{M-s}(1-\rho)\right].$$

$$L = \sum_{n=0}^{s-1} nP_n + L_q + s\left(1 - \sum_{n=0}^{s-1} P_n\right).$$

$$W = E(\mathcal{W}) = \frac{L}{\lambda},\ W_q = E(\mathcal{W}_q) = \frac{L_q}{\lambda},$$

Το Βασικό Πρότυπο με Περιορισμένο Πληθυσμό

M = μέγεθος του πληθυσμού

Αν ο αριθμός των πελατών στο σύστημα είναι n ($n = 0,1,\ldots,M$), τότε υπάρχουν μόνο ($M - n$) δυνατοί πελάτες στον πληθυσμό.

Παράδειγμα εφαρμογής: πρόβλημα επιδιόρθωσης μηχανών, όπου ένας ή περισσότεροι τεχνίτες (s τεχνίτες) αναλαμβάνουν να επιδιορθώσουν τη μηχανή ή μηχανές που παθαίνουν βλάβη από μία ομάδα M μηχανών.

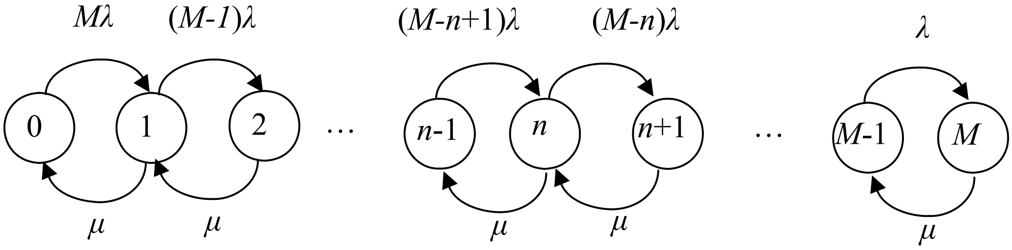
Για κάθε μέλος του πληθυσμού, ο χρόνος που μεσολαβεί από τη στιγμή που φεύγει το μέλος από το σύστημα μέχρι να επιστρέψει στο σύστημα έχει εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.

Ο υπόλοιπος χρόνος μέχρι την επόμενη άφιξη στο σύστημα, όταν υπάρχουν n πελάτες μέσα στο σύστημα και άρα $M - n$ πελάτες έξω από το σύστημα, είναι ο ελάχιστος από τους υπόλοιπους χρόνους μέχρι την επόμενη άφιξη κάθε ενός από τους $M - n$ πελάτες που βρίσκονται έξω από το σύστημα. Συνεπώς έχει εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda_n = (M - n)\lambda$.

(α) Μία θέση ($s = 1$)

$$\lambda_n = \begin{cases} (M-n)\lambda, & n = 0,1,\ldots,M \\ 0, & n \geq M \end{cases}$$

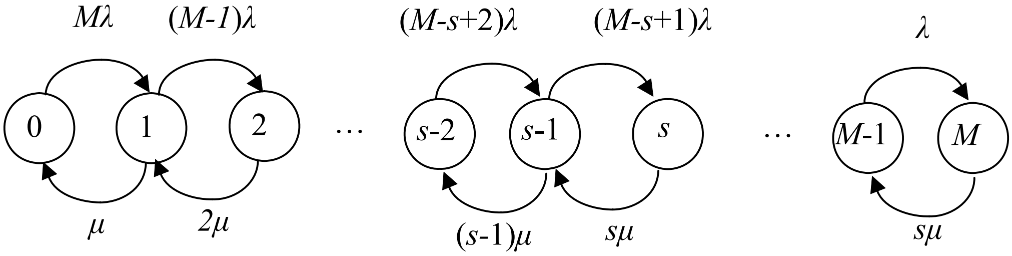
$$\mu_n = \mu,\ n = 1, 2, \ldots$$



Διάγραμμα ρυθμών για το βασικό πρότυπο με περιορισμένο πληθυσμό ($s = 1$)

(β) Παράλληλες θέσεις ($s > 1$) $\lambda_n = \begin{cases} (M-n)\lambda, & n = 0,1,\ldots,M \\ 0, & n \geq M. \end{cases}$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & n = 1,2,\ldots,s \\ s\mu, & n = s, s+1,\ldots \end{cases}$$



Διάγραμμα ρυθμών για το βασικό πρότυπο με περιορισμένο πληθυσμό ($s > 1$)

Αποτελέσματα για μία θέση εξυπηρέτησης ($s = 1$)

$$C_n = M(M-1)\cdots(M-n+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{M!}{(M-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \ n = 1, 2, \ldots, M$$

$$C_n = 0, \ n > M.$$

$$P_0 = 1 \Big/ \sum_{n=0}^{M}\left[\frac{M!}{(M-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right].$$

$$P_n = \frac{M!}{(M-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0, \ n = 0, 1, 2, \ldots, M$$

$$L_q = \sum_{n=1}^{M}(n-1)P_n = M - \frac{\lambda+\mu}{\lambda}\left(1-P_0\right)$$

$$L = \sum_{n=0}^{M} nP_n = L_q + \left(1-P_0\right) = M - \frac{\mu}{\lambda}\left(1-P_0\right).$$

$$W = \frac{L}{\overline{\lambda}}, \ W_q = \frac{L_q}{\overline{\lambda}},$$

όπου

$$\overline{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n P_n = \sum_{n=0}^{M}(M-n)\lambda P_n = \lambda\left(M-L\right).$$

Αποτελέσματα για παράλληλες θέση εξυπηρέτησης ($s > 1$)

$$C_n = \frac{M!}{(M-n)!n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \ n = 1, 2, \ldots, s$$

$$C_n = \frac{M!}{(M-n)!s!s^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \ n = s, s+1, \ldots, M$$

$$C_n = 0, \ n > M.$$

$$P_0 = 1 \Bigg/ \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{M!}{(M-n)!n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s}^{M} \frac{M!}{(M-n)!s!s^{n-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]$$

$$P_n = P_0 \frac{M!}{(M-n)!n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \; n = 1, 2, \ldots, s$$

$$P_n = P_0 \frac{M!}{(M-n)!s!s^{n-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \; n = s, s{+}1, \ldots, M$$

$$P_n = 0, \; n > M.$$

$$L_q = \sum_{n=s}^{M} (n-s) P_n$$

$$L = \sum_{n=0}^{s-1} n P_n + L_q + s\left(1 - \sum_{n=0}^{s-1} P_n\right).$$

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}}, \; W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}},$$

όπου

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n = \sum_{n=0}^{M} (M-n)\lambda P_n = \lambda\left(M - L\right).$$

Ένα Πρότυπο με Εξαρτημένο Ρυθμό Εξυπηρέτησης και / ή Ρυθμό Αφίξεων

Διαμόρφωση για μία θέση εξυπηρέτησης (s = 1).

Περίπτωση 1

$$\lambda_n = \lambda, \; n = 0, 1, \ldots$$
$$\mu_n = n^c \mu_1, \; n = 1, 2, \ldots$$

όπου

n = ο αριθμός πελατών στο σύστημα.

μ_n = ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης όταν υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα

$1/\mu_1$ = ο μέσος «κανονικός» χρόνος εξυπηρέτησης, δηλαδή ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης του πελάτη, όταν είναι ο μόνος πελάτης στο σύστημα.

c = ο συντελεστής «πίεσης», δηλαδή μια θετική σταθερή, που δείχνει το βαθμό με τον οποίο ο ρυθμός εξυπηρέτησης επηρεάζεται από την κατάσταση του συστήματος.

$$C_n = \frac{(\lambda/\mu_1)^n}{(n!)^c}, \; n = 1, 2, \ldots$$

Μια μόνιμη κατάσταση λειτουργίας προκύπτει πάντα όταν $c > 0$.

Δεν υπάρχουν αναλυτικές σχέσεις για τα διάφορα αθροίσματα.

Όμως, σχεδόν ακριβείς τιμές των P_0 και L έχουν καταγραφεί σε πίνακες για διάφορες τιμές των c και λ/μ_1 με άθροιση πεπερασμένου αριθμού όρων σε Η/Υ.

Περίπτωση 2

$$\lambda_n = (n+1)^{-b} \lambda_0, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\mu_n = \mu,\ n = 1, 2, 3, \dots$$

$$C_n = \frac{(\lambda_0/\mu)^n}{(n!)^b},\ n = 1, 2, \dots$$

Όταν $c = b$ και $\lambda/\mu_1 = \lambda_0/\mu$, τότε οι τιμές C_n είναι ίδιες με αυτές για την περίπτωση 1, και επομένως μπορούν να εφαρμοστούν τα αποτελέσματα των πινάκων.

Περίπτωση 3

$$\lambda_n = (n + 1)^{-b}\lambda_0,\ n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mu_n = n^{a}\mu_1,\ n = 1, 2, \dots$$

$$C_n = \frac{(\lambda_0/\mu_1)^n}{(n!)^{a+b}},\ n = 1, 2, \dots$$

Όταν $c = a + b$ και $\lambda/\mu_1 = \lambda_0/\mu_1$, τότε οι τιμές C_n είναι ίδιες με αυτές για την περίπτωση 1, και επομένως μπορούν να εφαρμοστούν τα αποτελέσματα των πινάκων.

Διαμόρφωση για παράλληλες θέση εξυπηρέτησης ($s > 1$)

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda_0, & n \le s-1 \\ \left(\dfrac{s}{n+1}\right)^b, & n \ge s-1 \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu_1, & n \le s \\ \left(\dfrac{n}{s}\right)^a s\mu_1, & n \ge s \end{cases}$$

$$C_n = \begin{cases} \dfrac{\left(\lambda_0/\mu_1\right)^n}{n!}, & n = 1, 2, \dots, s \\ \dfrac{\left(\lambda_0/\mu_1\right)^n}{s!(n!/s!)^c s^{(1-c)(n-s)}}, & n = s, s+1, \dots \end{cases} \qquad \text{όπου } c = a + b.$$

Σχεδόν ακριβείς τιμές των P_0 και L_q και L έχουν καταγραφεί σε πίνακες για διάφορες τιμές των c, λ_0/μ_1, και c, με άθροιση πεπερασμένου αριθμού όρων σε Η/Υ.

Παράδειγμα

Εξωτερικά Ιατρεία: $\lambda = 2$ πελάτες / ώρα, $\mu_1 = 2{,}5$ και $\mu_6 = 5$ πελάτες / ώρα, $s = 1, 2$. Ο συντελεστής c πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$\mu_6 = 6^c\,\mu_1 \Rightarrow 6^c = 2 \Rightarrow c = 0{,}4.$$

Αποτελέσματα

	$s = 1$	$s = 2$
$\lambda/s\mu_1$	0,8	0,4
$\lambda/s\mu_6$	0,4	0,2
P_0	0,367	0,440
P_1	0,294	0,352
L_q	0,618	0,095
L	1,251	0,864
W_q	0,309	0,048
W	0,626	0,432
$P\{\mathcal{W}_q > 0\}$	0,633	0,208

2.6 Πρότυπα Ουράς με μη Εκθετικές Κατανομές

Πρότυπο με μια Θέση με Είσοδο Poisson και Χρόνο Εξυπηρέτησης Οποιαδήποτε Κατανομή ($M/G/1$)

Υποθέσεις:

- Μια θέση εξυπηρέτησης ($s = 1$),
- Διαδικασία εισόδου Poisson με σταθερό μέσο ρυθμό αφίξεων λ,
- Ανεξάρτητοι χρόνοι εξυπηρέτησης με την ίδια κατανομή πιθανότητας με μέση τιμή $1/\mu$ και διακύμανση σ^2,
- $\rho = \lambda/\mu < 1$.

Διαθέσιμα αποτελέσματα:

$$P_0 = 1 - \rho,$$

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)},$$

$$L = \rho + L_q,$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda},$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}.$$

Πρότυπο με Είσοδο Poisson και Σταθερούς Χρόνους Εξυπηρέτησης ($M/D/s$)

Αποτελέσματα για μία θέση εξυπηρέτησης ($s = 1$)

$$L_q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)},\ L = \rho + L_q,\ W_q = \frac{L_q}{\lambda},\quad W = W_q + \frac{1}{\mu}.$$

Αποτελέσματα για παράλληλες θέση εξυπηρέτησης ($s > 1$)

Αποτελέσματα καταγεγραμμένα σε πίνακες για $\rho = \lambda / s\mu < 1$.

Πρότυπο με Είσοδο Poisson και Σταθερούς Χρόνους Εξυπηρέτησης ($M/E_k/s$)

- Εκφυλισμένη κατανομή: $\sigma = 0$.
- Εκθετική (σταθερή) κατανομή: $\sigma = 1/\mu$.
- Κατανομή Erlang: $0 < \sigma < 1/\mu$.

Η τυχαία μεταβλητή T ακολουθεί μιαν κατανομή Erlang με παραμέτρους μ και k, αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς της είναι:

$$f_T(t) = \frac{(\mu k)^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-k\mu t},\ \ t \geq 0,\ \text{όπου } \mu, k > 0 \text{ και } k \text{ ακέραιος.}$$

Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της κατανομής είναι

$$E(T) = \frac{1}{\mu} \text{ και } \sigma_T = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{1}{\mu}.$$

Σημασία κατανομής Erlang

1. Έστω T_1, T_2, …, T_k ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν μια εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1 / k\mu$. Τότε το άθροισμά τους

$$T = T_1 + T_2 + \ldots + T_k,$$

ακολουθεί μια κατανομή Erlang με παραμέτρους μ και k.

2. Η κατανομή Erlang αντιπροσωπεύει μια μεγάλη οικογένεια κατανομών που παίρνουν μόνο μη αρνητικές τιμές.

Ειδικές περιπτώσεις:

Εκθετική κατανομή = κατανομή Erlang για $k = 1$,

Εκφυλισμένη (σταθερή) κατανομή = κατανομή Erlang για $k = \infty$.

Αποτελέσματα για μία θέση εξυπηρέτησης ($s = 1$)

$$L_q = \frac{\lambda^2/k\mu^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{1+k}{2k}\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)},$$

$$W_q = \frac{1+k}{2k}\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)},$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu},$$

$$L = \lambda W.$$

Αποτελέσματα για παράλληλες θέση εξυπηρέτησης ($s > 1$)

Υπάρχει γενική λύση μόνιμης κατάστασης μόνο για ειδικές περιπτώσεις.

Πρότυπα χωρίς Είσοδο Poisson

1. Πρότυπο $G/M/s$ Υπάρχουν μερικά αποτελέσματα
2. Πρότυπο $D/M/s$ Αποτελέσματα καταγεγραμμένα σε πίνακες
3. Πρότυπο $E_k/M/s$ Αποτελέσματα καταγεγραμμένα σε πίνακες
4. Μερικά αποτελέσματα υπάρχουν και για τα πρότυπα $E_k/ E_k /s$, $E_k/D/s$, $D/E_k/s$.

2.7 Ένα Πρότυπο Ουράς με Προτεραιότητα

Υποθέσεις:

- Υπάρχουν s θέσεις εξυπηρέτησης.
- Υπάρχουν N κατηγορίες προτεραιοτήτων (η κατηγορία 1 έχει τη μεγαλύτερη προτεραιότητα και η κατηγορία N τη μικρότερη).
- Για κάθε κατηγορία προτεραιότητας η διαδικασία εισόδου είναι Poisson. Ο μέσος ρυθμός αφίξεων *διαφέρει* μεταξύ κατηγοριών.
- Για κάθε κατηγορία προτεραιότητας οι χρόνοι εξυπηρέτησης έχουν εκθετική κατανομή. Ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης είναι *ίδιος* για όλες τις κατηγορίες.

Περίπτωση μη αποκλειστικών προτεραιοτήτων

Αν ένας πελάτης με μεγαλύτερη προτεραιότητα από αυτόν που εξυπηρετείται εισέλθει στο σύστημα, ο πελάτης που εξυπηρετείται δεν στέλνεται πίσω στην ουρά αλλά τελειώνει την εξυπηρέτησή του χωρίς διακοπή.

Αποτελέσματα για παράλληλες θέση εξυπηρέτησης ($s > 1$)

$$W_k = \frac{1}{A \cdot B_{k-1} \cdot B_k} + \frac{1}{\mu}, \qquad \text{για } k = 1, 2, \ldots, N,$$

$$A = s!\left(\frac{s\mu - \lambda}{\rho^s}\right)\sum_{j=0}^{s-1}\frac{\rho^j}{j!} + s\mu,$$

$$B_0 = 1 \text{ και } B_k = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i}{s\mu},\ k = 1, 2, \ldots, N.$$

όπου $\lambda = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i,\ \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$

$$L_k = \lambda_\kappa W_k,\ k = 1, 2, \ldots, N.$$

Περίπτωση αποκλειστικών προτεραιοτήτων

Αν ένας πελάτης με μεγαλύτερη προτεραιότητα από αυτόν που εξυπηρετείται εισέλθει στο σύστημα, ο πελάτης που εξυπηρετείται στέλνεται πίσω στην ουρά και αντικαθίσταται από τον πελάτη που εισήλθε στο σύστημα.

Αποτελέσματα για μία θέση εξυπηρέτησης ($s = 1$)

$$W_k = \frac{1/\mu}{B_{k-1} \cdot B_k},\ k = 1, 2, \ldots, N,$$

$$B_0 = 1 \text{ και } B_k = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i}{s\mu},\ k = 1, 2, \ldots, N.$$

όπου $\lambda = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i,\ \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$

$$L_k = \lambda_\kappa W_k,\ k = 1, 2, \ldots, N.$$

Αποτελέσματα για παράλληλες θέση εξυπηρέτησης ($s > 1$)

Το W_k μπορεί να υπολογισθεί με μια επαναληπτική διαδικασία, που θα παρουσιασθεί στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα: Εξωτερικά Ιατρεία

Τρεις κατηγορίες ασθενών:

1. *κρίσιμες* περιπτώσεις 10%
2. *σοβαρές* περιπτώσεις 30%
3. *χρόνιες* περιπτώσεις 60%

$$\mu = 3,\ \lambda = 2 \Rightarrow \lambda_1 = 0{,}2,\ \lambda_2 = 0{,}6,\ \lambda_3 = 1{,}2.$$

Αποτελέσματα:

	Αποκλειστικές Προτεραιότητες		Μη αποκλειστικές Προτεραιότητες	
	$s = 1$	$s = 2$	$s = 1$	$s = 2$
A	-	-	4,5	36
B_1	0,933	-	0,933	0,967
B_2	0,733	-	0,733	0,867
B_3	0,333	-	0,333	0,667
$W_1 - 1/\mu$	0,024	0,00037	0,238	0,029
$W_2 - 1/\mu$	0,154	0,00793	0,325	0,033
$W_3 - 1/\mu$	1,033	0,06542	0,889	0048

Υπολογισμός των W_q για την περίπτωση των αποκλειστικών προτεραιοτήτων για s = 2:

1. $W_1 = W$ για (λ = 0,2) = 0,33370.
2. Έστω $\overline{W}_{1-2}$ ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα μιας τυχαίας άφιξης σε μία από τις κατηγορίες 1 και 2.

$$\overline{W}_{1-2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} W_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} W_2 = (1/4)W_1 + (3/4)W_2.$$

$$\overline{W}_{1-2} = W \text{ για } (\lambda = 0{,}2 + 0{,}6 = 0{,}8) = 0{,}33937.$$

$$\Rightarrow W_2 = (4/3)[0{,}33937 - (1/4)(0{,}33370)] = 0{,}34126.$$

3. Έστω $\overline{W}_{1-3}$ ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα μιας τυχαίας άφιξης σε μία από τις κατηγορίες 1, 2 και 3.

$$\overline{W}_{1-3} = 0{,}1W_1 + 0{,}3W_2 + 0{,}6W_3.$$

$$\overline{W}_{1-3} = W \text{ για } (\lambda = 0{,}2 + 0{,}6 + 1{,}2 = 2) = 0{,}375.$$

$$\Rightarrow W_3 = (1/0{,}6)[0{,}375 - (0{,}1)(0{,}33370) - (0{,}3)(0{,}34126)] = 0{,}39875.$$

2.8 Δίκτυα Ουρών (δεν υπάρχει στο βιβλίο)

Δίκτυα Ουρών: Δίκτυα συστημάτων εξυπηρέτησης, όπου οι πελάτες πρέπει να εξυπηρετηθούν σε μερικά ή σε όλα τα συστήματα εξυπηρέτησης.

$\Rightarrow$ Πρέπει να μελετήσουμε ολόκληρο το δίκτυο, για να αποκτήσουμε πληροφόρηση σχετικά με το **συνολικό** μέσο χρόνο αναμονής, το μέσο αριθμό πελατών σε **ολόκληρο** το σύστημα κ.ο.κ.

Τα αναλυτικά αποτελέσματα των δικτύων ουράς είναι πολύ περιορισμένα.

Σημαντικό αποτέλεσμα:

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ. Έστω ένα σύστημα εξυπηρέτησης με *είσοδο* Poisson με παράμετρο λ, s θέσεις εξυπηρέτησης, και χρόνο εξυπηρέτησης με την ίδια εκθετική κατανομή με παράμετρο μ για κάθε θέση εξυπηρέτησης, όπου $s\mu > \lambda$. Τότε η *έξοδος* για τη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας του συστήματος είναι επίσης μια διαδικασία Poisson με παράμετρο λ.

Η παραπάνω ιδιότητα:

1. Ισχύει για οποιαδήποτε πειθαρχία ουράς.
2. Δεν ισχύει για ουρές με περιορισμένο μήκος.

Ουρές με απεριόριστο μήκος στη σειρά

Υποθέσεις:

1. Υπάρχουν m συστήματα εξυπηρέτησης στη σειρά.
2. Κάθε σύστημα εξυπηρέτησης έχει μια ουρά απεριόριστου μήκους.
3. Η διαδικασία αφίξεων στο πρώτο σύστημα είναι Poisson με παράμετρο λ.
4. Κάθε σύστημα εξυπηρέτησης έχει την ίδια εκθετική κατανομή χρόνου εξυπηρέτησης με παράμετρο μ_i για όλες τις s_i θέσεις εξυπηρέτησής του, με $s_i\mu_i > \lambda$.

$\Rightarrow$ Κάθε σύστημα εξυπηρέτησης έχει είσοδο Poisson με παράμετρο λ και μπορεί να αναλυθεί ανεξάρτητα από τα άλλα χρησιμοποιώντας ένα πρότυπο $M/M/s_i$.

Χρησιμότητα:

Π.χ. $P\{N_1 = n_1, N_2 = n_2, \ldots, N_m = n_m\} = P_{n_1} P_{n_2} \cdots P_{n_m}$ (**Λύση με μορφή γινομένου**)

Δίκτυα Jackson

Ένα **δίκτυο Jackson** είναι ένα δίκτυο με m συστήματα εξυπηρέτησης, όπου κάθε σύστημα εξυπηρέτησης i ($i = 1, 2, \ldots, m$) έχει:

1. Μια ουρά με απεριόριστο μήκος,
2. Πελάτες που φτάνουν από έξω από το σύστημα σύμφωνα με μια διαδικασία εισόδου Poisson με παράμετρο a_i και
3. s_i θέσεις εξυπηρέτησης με την ίδια εκθετική κατανομή χρόνου εξυπηρέτησης με παράμετρο μ_i.

Ένας πελάτης που εξέρχεται από το σύστημα i κατευθύνεται στο σύστημα j ($j = 1, 2, \ldots, m$, αλλά $j \neq i$) με πιθανότητα p_{ij} η εξέρχεται από το δίκτυο με πιθανότητα

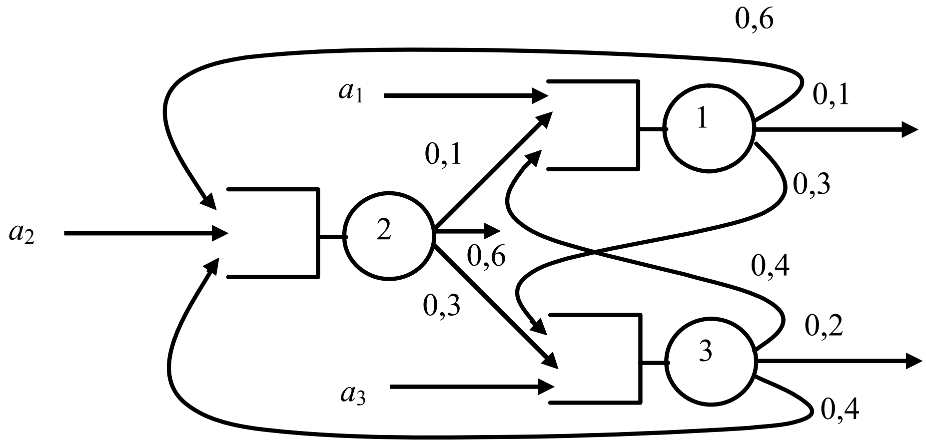
$$q_i = 1 - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{m} p_{ij}.$$

Οποιοδήποτε τέτοιο δίκτυο έχει την παρακάτω σημαντική ιδιότητα.

Κάτω από συνθήκες μόνιμης κατάστασης, κάθε σύστημα j ($j = 1, 2, \ldots, m$) σε ένα δίκτυο Jackson συμπεριφέρεται σαν να ήταν ένα ανεξάρτητο σύστημα ουράς $M/M/s$ με ρυθμό άφιξης

$$\lambda_j = a_j + \sum_{i=1,\, i\neq j}^{m} \lambda_i p_{ij}, \text{ όπου } s_j\mu_j > \lambda_j.$$

Παράδειγμα



Σύστημα j	s_j	μ_j	a_j	p_{ij} $i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$j = 1$	1	10	1	-	0,1	0,4
$j = 2$	2	10	4	0,6	-	0,4
$j = 3$	1	10	3	0,3	0,3	-

$\lambda_1 = 1 + 0{,}1\lambda_2 + 0{,}4\lambda_3$

$\lambda_2 = 4 + 0{,}6\lambda_1 + 0{,}4\lambda_3 \qquad\qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 10,\ \lambda_3 = 7{,}5.$

$\lambda_3 = 3 + 0{,}3\lambda_1 + 0{,}3\lambda_2$

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{s_i\mu_i} = \begin{cases} 1/2, & i = 1 \\ 1/2, & i = 2 \\ 3/4, & i = 3 \end{cases}$$

$$P_{n_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n_1} \qquad P_{n_2} = \begin{cases} \dfrac{1}{3}, & n_2 = 0 \\ \dfrac{1}{3}, & n_2 = 1 \\ \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n_2-1}, & n_2 \geq 2 \end{cases} \qquad P_{n_3} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n_3}$$

$$P\{(N_1, N_2, N_3) = (n_1, n_2, n_3)\} = P_{n_1}P_{n_2}P_{n_3}.$$

$L_1 = 1,\ L_2 = 4/3,\ L_3 = 3.$

$L = L_1 + L_2 + L_3 = 5{,}333.$

$$W = \frac{L}{a_1 + a_2 + a_3} = \frac{2}{3}.$$

3. Εφαρμογές της Θεωρίας Ουράς

Στο κεφάλαιο αυτό κάνουμε μια συνοπτική παρουσίαση του κεφαλαίου 9 του βιβλίου Hillier, F.S., Lieberman, G.J. Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Τόμος Α’, Τεύχος Γ’, Εκδόσεις Παπαζήση, 1985.

3.1 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1 – Πόσοι Τεχνικοί;

- Υπάρχουν $M = 10$ μηχανές.
- Ρυθμός βλάβης: $\lambda = 1/20$ μηχανές (πελάτες) ανά ημέρα.
- Ρυθμός επιδιόρθωσης: $\mu = ½$ μηχανές (πελάτες)ανά ημέρα.
- Λειτουργούν μόνο οκτώ (8) μηχανές συγχρόνως:

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 8\lambda,\ \lambda_3 = 7\lambda,\ \lambda_4 = 6\lambda,\ \ldots,\ \lambda_9 = \lambda,\ \lambda_{10} = 0.$$

- Υπάρχει μόνο ένας τεχνικός επιδιόρθωσης ($s = 1$):

$$\mu_0 = 0,\ \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{10} = \mu.$$

- Εξετάζεται η περίπτωση πρόσληψης ενός δεύτερου τεχνικού ($s = 2$).
- Το κόστος για κάθε τεχνικό είναι 70 χ.μ. την ημέρα.
- Το διαφυγόν κέρδος όταν λειτουργούν λιγότερες από 8 μηχανές είναι 100 χ.μ. την ημέρα για κάθε μηχανή που δεν λειτουργεί.

Παράδειγμα 2 – Ποιος Υπολογιστής;

- Εξετάζεται η περίπτωση ενοικίασης ενός γρήγορου ή ενός λιγότερο γρήγορου Η/Υ.
- Ρυθμός άφιξης: $\lambda = 20$ προγράμματα ανά ώρα.
- Ρυθμός επεξεργασίας: $\mu = 30$ προγράμματα ανά ώρα με τον γρήγορο Η/Υ και $\mu = 25$ προγράμματα ανά ώρα με τον λιγότερο γρήγορο Η/Υ.
- Το κόστος ενοικίασης για κάθε ώρα λειτουργίας είναι 100 χ.μ. για τον γρήγορο Η/Υ και 75 χ.μ. για τον λιγότερο γρήγορο Η/Υ.

Παράδειγμα 3 – Πόσες Αποθήκες Εργαλείων;

- Εξετάζεται η περίπτωση κατασκευής μίας ή περισσότερων αποθηκών εργαλείων σε ένα εργοστάσιο.
- Ρυθμός εξυπηρέτησης: $\mu = 120$ μηχανικοί ανά ώρα.
- Ρυθμός άφιξης: $\lambda = 120$ μηχανικοί ανά ώρα.
- Το συνολικό κόστος για κάθε υπάλληλο αποθήκης είναι 10 χ.μ. ανά ώρα.
- Το κόστος για κάθε αποθήκη είναι 8 χ.μ. ανά ώρα εργασίας.
- Το κέρδος από την απασχόληση κάθε μηχανικού είναι 24 χ.μ. ανά ώρα.

3.2 Διαδικασία Λήψης Αποφάσεων

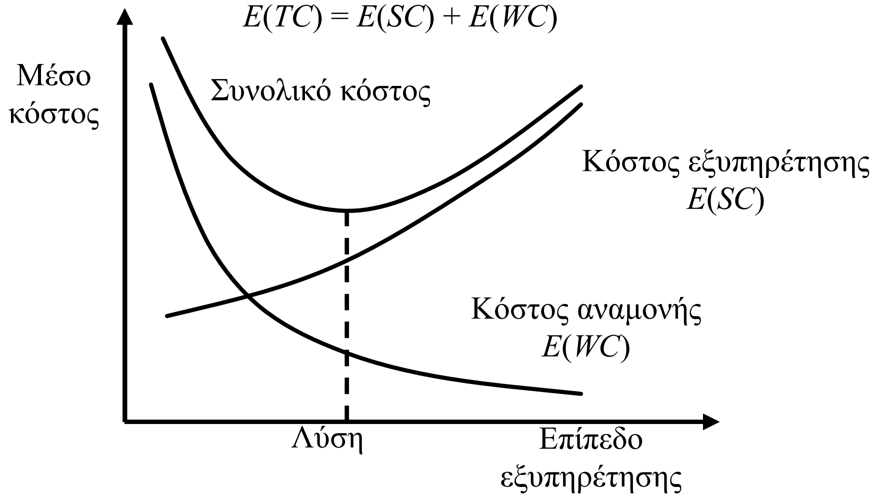
Στα περισσότερα προβλήματα πρέπει να παρθούν μια ή περισσότερες από τις παρακάτω αποφάσεις:

1. Αριθμός θέσεων εξυπηρέτησης σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης (s).
2. Αποτελεσματικότητα θέσεων εξυπηρέτησης (μ).
3. Αριθμός συστημάτων εξυπηρέτησης (λ).

Όλες οι παραπάνω αποφάσεις έχουν σχέση με το εξής γενικό πρόβλημα. Να προσδιοριστεί το *επίπεδο εξυπηρέτησης* που ελαχιστοποιεί το συνολικό:

1. μέσο κόστος εξυπηρέτησης και
2. το μέσο κόστος αναμονής για την εξυπηρέτηση.

   Minimize $E(TC) = E(SC) + E(WC)$



Άμεση εκτίμηση του κόστος αναμονής:

1. Εξωτερικοί πελάτες
   - Διαφυγόν κέρδος λόγω χαμένης συναλλαγής
   - Κοινωνικό κόστος
2. Εσωτερικοί πελάτες
   - Διαφυγόν κέρδος από όλη τη χαμένη παραγωγική εκροή

Διαμόρφωση Συναρτήσεων Κόστους Αναμονής

Η μορφή $g(N)$

$$E(WC) = E\{g(N)\} = \sum_{n=0}^{\infty} g(n)P_n.$$

Αν $g(N) = C_w N$, τότε $E(WC) = C_w \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = C_w L.$

Παράδειγμα 1 – Πόσοι τεχνικοί;

$$g(n) = \begin{cases} 0, & n = 0,1,2 \\ 100(n-2), & n = 3,4,\ldots,10 \end{cases}$$

Υπολογισμός του $E(WC)$

		$s = 1$		$s = 2$	
$N = n$	$g(n)$	P_n	$g(n)P_n$	P_n	$g(n)P_n$
0	0	0,271	0	0,433	0
1	0	0,217	0	0,346	0
2	0	0,173	0	0,139	0
3	100	0,139	14	0,055	6
4	200	0,097	19	0,019	4
5	300	0,058	17	0,006	2
6	400	0.029	12	0,001	0
7	500	0,012	6	$3\ 10^{-4}$	0
8	600	0,003	2	$4\ 10^{-5}$	0
9	700	$7\ 10^{-4}$	0	$4\ 10^{-6}$	0
10	800	$7\ 10^{-5}$	0	$2\ 10^{-7}$	0
			70 χ.μ./ημέρα		12 χ.μ./ημέρα

Η μορφή $h(\mathcal{W})$

$$E\{h(\mathcal{W})\} = \int_0^\infty h(w) f_{\mathcal{W}}(w) dw = \text{μέσο κόστος αναμονής ανά πελάτη.}$$

όπου $f_{\mathcal{W}}(w)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του $\mathcal{W}$.

$$E(WC) = \lambda E\{h(\mathcal{W})\} = \lambda \int_0^\infty h(w) f_{\mathcal{W}}(w) dw$$

Παράδειγμα 2 – Ποιος Υπολογιστής:

Ένας φοιτητής μελετάει κατά το χρόνο αναμονής του μόνο στο 1/3 της κανονικής του αποτελεσματικότητας.

Η αξία του να μπορεί να μελετάει με πλήρη αποτελεσματικότητα είναι 15 χ.μ. ανά ώρα.

$\Rightarrow$ Κόστος = 10 $\mathcal{W}$.

Η αξία για ένα φοιτητή που μπορεί να αποφύγει τον επιπρόσθετο εργάσιμο χρόνο που απαιτείται για το έργο τους επειδή παύει να ασχολείται με αυτό συνεχώς είναι 2 χ.μ και 8 χ.μ. για αναμονή ½ και 1 ώρας, αντίστοιχα.

$\Rightarrow$ Κόστος = $8W^2$.

$$h(\mathcal{W}) = 10\ \mathcal{W} + 8\ \mathcal{W}^2.$$

Δεδομένου ότι $f_{\mathcal{W}}(w) = \mu(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)w}$, έχουμε ότι

$$E\{h(\mathcal{W})\} = \int_0^\infty (10w + 8w^2)\mu(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)w} dw.$$

$$\mu(1-\rho) = \mu - \lambda = \begin{cases} 10, & \text{γρήγορος Η/Υ} \\ 5, & \text{λιγότερο γρήγοροε Η/Υ} \end{cases}$$

$$E\{h(\mathcal{W})\} = \begin{cases} 1{,}16, & \text{γρήγορος Η/Υ} \\ 2{,}64, & \text{λιγότερο γρήγορος Η/Υ} \end{cases}$$

$$E(WC) = \lambda E\{h(\mathcal{W})\} = \begin{cases} 23{,}20, & \text{γρήγορος Η/Υ} \\ 52{,}80, & \text{λιγότερο γρήγορος Η/Υ} \end{cases}$$

Αν $h(\mathcal{W}) = C_w\, \mathcal{W}$, τότε $E(WC) = \lambda E(C_w \mathcal{W}) = C_w(\lambda W) = C_w L$.

Παράδειγμα 3- Πόσες Αποθήκες Εργαλείων;

$C_W = 24$. Άρα $E(WC) = 24L$.

3.3 Πρότυπα Αποφάσεων

Πρότυπο 1 – Άγνωστο *s*, σταθερά *μ* και *λ*.

Διαμόρφωση του Προτύπου 1

C_s = οριακό κόστος μιας θέσης στη μονάδα του χρόνου.

Δίνονται: μ, λ, C_s.

Ζητείται: s.

Αντικειμενικός στόχος: Minimize $E(TC) = sC_s + E(WC)$.

Παράδειγμα 1 – Πόσοι τεχνικοί;

s	sC_s	$E(WC)$	$E(TC)$
1	70	70	140/ημέρα (ελάχιστο)
2	140	12	152/ημέρα
≥ 3	≥ 210	≥ 0	≥ 210/ημέρα

Πρότυπο 2 – Άγνωστα *μ* και *s*, σταθερό *λ*.

Διαμόρφωση του Προτύπου 2

$f(\mu)$ = οριακό κόστος θέσης στη μονάδα του χρόνου, όταν ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης είναι μ.

A = σύνολο των εφικτών τιμών του μ.

Δίνονται: λ, $f(\mu)$, A.

Ζητούνται: μ, s.

Αντικειμενικός στόχος: Minimize $E(TC) = sf(\mu) + E(WC)$, με τον περιορισμό $\mu \in A$.

Παράδειγμα 2 – Ποιος Υπολογιστής;

$$A = \{25, 30\}$$

$$f(\mu) = \begin{cases} 75, & \mu = 25 \\ 100, & \mu = 30. \end{cases}$$

$$s = 1.$$

$$E(TC) = f(\mu) + E(WC) = \begin{cases} 75 + 52{,}80 = 127{,}8\,/\,\text{ώρα}, & \text{γρήγορο Η/Υ} \\ 100 + 23{,}20 = 123{,}20/\text{ώρα}, & \text{λιγότερο γρ. Η/Υ} \end{cases}$$

Άρα συμφέρει η ενοικίαση του λιγότερου γρήγορου Η/Υ.

Αν ο αριθμός των τιμών του μ είναι *πεπερασμένος* τότε μπορούμε να κάνουμε την ελαχιστοποίηση σε δύο βήματα:

1. Για κάθε τιμή του μ βάζουμε $C_s = f(\mu)$ και βρίσκουμε το s που ελαχιστοποιεί το $E(TC)$.
2. Συγκρίνουμε τα ελάχιστα και επιλέγουμε την τιμή του μ που δίνει το ολικό ελάχιστο.

Αν ο αριθμός των τιμών του μ είναι *άπειρος* τότε μπορούμε να κάνουμε την ελαχιστοποίηση σε δύο βήματα:

1. Για κάθε τιμή του s βρίσκουμε το μ που ελαχιστοποιεί το $E(TC)$: $(\partial E(TC)/\partial\mu = 0 \Rightarrow \mu$.
2. Συγκρίνουμε τα ελάχιστα και επιλέγουμε την τιμή του s που δίνει το ολικό ελάχιστο.

Συχνά, το 1^{ο} βήμα είναι πολύ δύσκολο να επιλυθεί, ιδιαίτερα όταν $s > 1$. Μια εναλλακτική πρακτική μέθοδος είναι να διακριτοποιήσουμε τις τιμές του μ σε ένα πεπερασμένο αριθμό και εφαρμόζουμε την πρώτη μέθοδο.

Ευτυχώς, κάτω από ορισμένες συνθήκες, το $s = 1$ δίνει το ολικό ελάχιστο $E(TC)$ και έτσι η περίπτωση $s > 1$ δεν χρειάζεται να εξεταστεί.

<u>Αριστότητα για μια θέση εξυπηρέτησης ($s = 1$).</u>

Συνθήκες ώστε η βέλτιστη λύση να είναι $s = 1$:

1. Η τιμή του μ που ελαχιστοποιεί το $E(TC)$ για $s = 1$ είναι εφικτή.
2. Το $f(\mu)$ είναι μια *γραμμική* ή μια *κοίλη* συνάρτηση.

$N = n$	Μέσος ρυθμός περατώσεων (s^*, μ^*) vs. $(1, s^*\mu^*)$, όπου $s^* > 1$
$n = 0$	$0 = 0$
$n = 1, 2, \ldots, s^* - 1$	$n\mu^* < s^*\mu^*$
$n \geq s^*$	$s^*\mu^* = s^*\mu^*$

1. Η δυναμικότητα εξυπηρέτησης της λύσης (s^*, μ^*) είναι μερικές φορές χειρότερη αλλά ποτέ καλύτερη απ’ αυτή της λύσης $(1, s^*\mu^*)$.

   Άρα το $E(WC)$ πρέπει να είναι μεγαλύτερο για την (s^*, μ^*) από ότι για την $(1, s^*\mu^*)$.

2. Από τη συνθήκη 2, $s^* f(\mu) \geq 1 f(s^*\mu^*)$.

   Άρα το $E(SC)$ πρέπει να είναι μεγαλύτερο για την (s^*, μ^*) από ότι για την $(1, s^*\mu^*)$.

$\Rightarrow$ Αν μπορούμε, καλύτερα να συγκεντρώνουμε την δυναμικότητα εξυπηρέτησης σε *μια γρήγορη* θέση εξυπηρέτησης παρά να τη διαμοιράσουμε σε *πολλές αργές* θέσεις.

Πρότυπο 3 – Άγνωστα λ και s

ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ 3

C_s = οριακό κόστος μιας θέσης στη μονάδα του χρόνου.

C_f = σταθερό κόστος εξυπηρέτησης ανά σύστημα εξυπηρέτησης στη μονάδα του χρόνου.

T = χρόνος ταξιδιού μετ’ επιστροφής για έναν πελάτη που πηγαίνει σ’ ένα σύστημα εξυπηρέτησης.

C_t = κόστος μιας μονάδας χρόνου ταξιδιού για κάθε πελάτη.

λ_P = μέσος ρυθμός αφίξεων για ολόκληρο τον πληθυσμό.

n = αριθμός συστημάτων εξυπηρέτησης.

Δίνονται: μ, C_s, C_f, λ_P.

Ζητούνται: λ, s.

Αντικειμενικός στόχος: Minimize $E(TC)$ με τον περιορισμό $\lambda = \lambda_P/n$, $n = 1, 2, \ldots$

όπου, $E(TC) = n\left[\left(C_f + sC_s\right) + E(WC) + \lambda C_t E(T)\right]$.

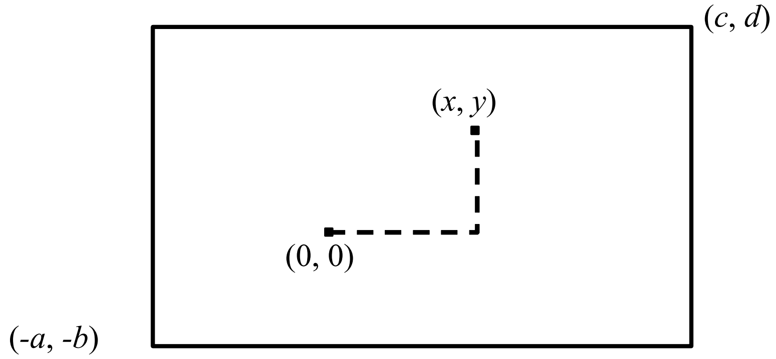
3.4 Υπολογισμός του Χρόνου Ταξιδιού

Υποθέσεις:

- Το ποσοστό του πληθυσμού που εκχωρείται στο σύστημα εξυπηρέτησης *κατανέμεται ομοιόμορφα* σε όλη την περιοχή.
- Κάθε άφιξη επιστρέφει στο *αρχικό σημείο* της.
- Η μέση ταχύτητα ταξιδιού δεν εξαρτάται από την απόσταση.
- Όλα τα ταξίδια είναι *ευθύγραμμα*, δηλαδή γίνονται σε ένα σύστημα *ορθογώνιων* δρόμων.

Ένα Βασικό Πρότυπο Χρόνου Ταξιδιού

Περιγραφή: Ορθογώνια περιοχή και ευθύγραμμο ταξίδι, όπως δίνονται στο παρακάτω διάγραμμα.



(0, 0) = σημείο όπου γίνεται η εξυπηρέτηση.

(x, y) = αφετηρία και τέρμα μιας τυχαίας άφιξης.

Ορισμοί: T = χρόνος ταξιδιού (με επιστροφή) για μια άφιξη.

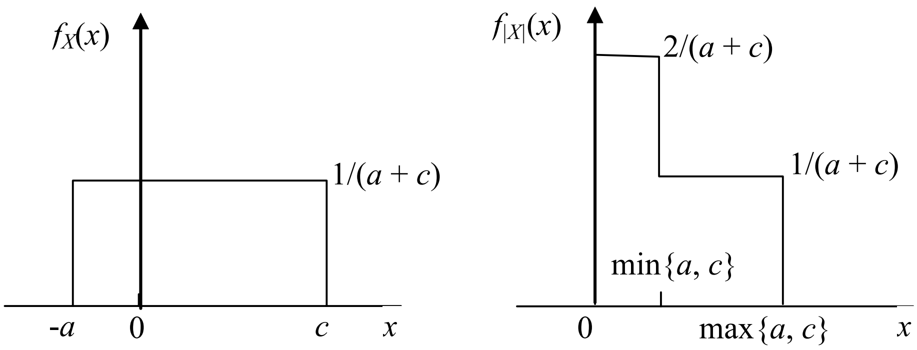
v = μέση ταχύτητα πελατών που έρχονται προς και από το σύστημα εξυπηρέτησης.

a, b, c, d = αντίστοιχες αποστάσεις των συνόρων της περιοχής από το σύστημα εξυπηρέτησης.

Δίνονται: v, a, b, c, d.

Ζητείται: Η μέση τιμή του T, $E(T)$.

$$D = 2\left(|X| + |Y|\right) \text{ και } T = \frac{D}{v} \Rightarrow E(T) = \frac{2}{v}\left(E\{|X|\} + E\{|Y|\}\right).$$



$$E\{|X|\} = \int_0^{\max\{a,c\}} x f_{|X|}(x)dx = \int_0^{\min\{a,c\}} \frac{2x}{a+c}dx + \int_{\min\{a,c\}}^{\max\{a,c\}} \frac{x}{a+c}dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{a+c}\left[\left(\min\{a,c\}\right)^2 + \left(\max\{a,c\}\right)^2\right] = \frac{a^2+c^2}{2(a+c)}.$$

$$E\{|Y|\} = \frac{b^2+d^2}{2(b+d)}.$$

$$E(T) = \frac{1}{v}\left(\frac{a^2+c^2}{2(a+c)} + \frac{b^2+d^2}{2(b+d)}\right).$$